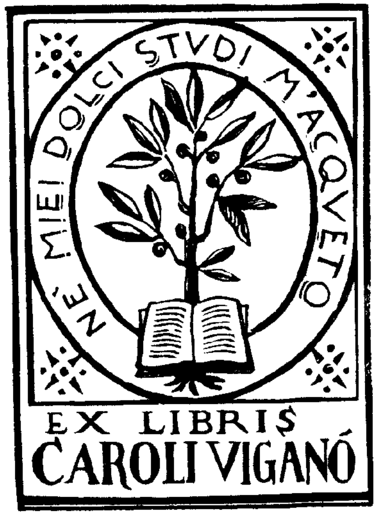


JOHANNIS BAPTISTÆ CARACCIOLI

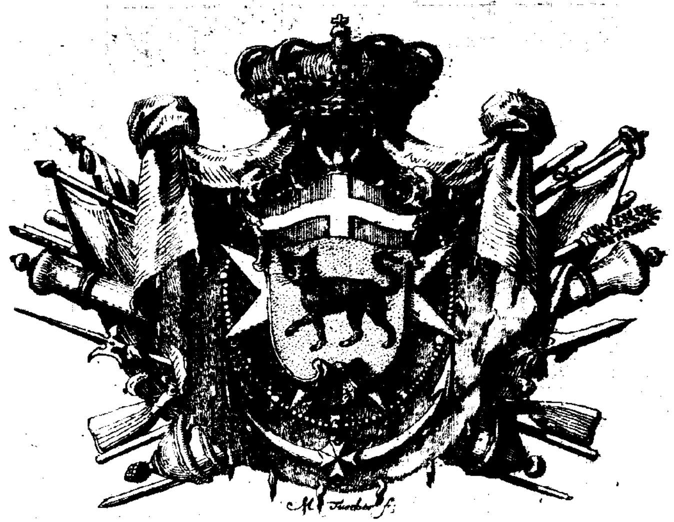
CLERICI REGULARIS

IN PISANA ACADEMIA

Publici Philoſophiæ Profeſſoris

DE LINEIS CURVIS

LIBER.



PISIS. ANNO MDCCXL.

Ex Typographia Jo. Dom. Carotti Impreſſ. Archiep.

Superiorum Permiſſu.

EXCELLENTISSIMO

CAJETANO BONANNIO

SACRI ORDINIS HIEROSOLYMITANI EQUITI

FILIO FRANCISCI

PRINCIPIS CATTOLICÆ

EX HISPANIARUM PRIMI ORDINIS MAGNATIBUS

AUREI VELLERIS EQUITIS

UTRIUSQ. SICILIÆ REGIS A CUBICULIS AUREÆ CLAVIS

JO. BAPTISTA CARACCIOLUS F.

DUas potiſſimum Cauſſas adferri ſolere intellexi, quare Illuſtres Viri, quibusque ſpectata aliqua Dignitas eſt, aut re-

renuunt, aut molestè ferunt, sibi libros hac tempestate dicari ab Auctoribus, vel ab iis, qui illos publicè edendos curarunt: altera est, harumce dedicationum nimio plus percrebrescens copia; & librorum quoque prætenuium argumentorum; quę totum rei adimit decus: altera, horribiles illæ, deformissimæ, nefariæ verè adsentationes, queis scatere Orationes Dedicationum sæpissimè videmus, & mirum in modum exæstuare. Obsequiorum fallacium officia solos plebejos animos oblectant: atque illos ad arrogantem elationem sollicitant; irritamenta procacitatis: Generosi autem Viri vilia prorsus illa habent, & vultum avertunt. Hac secunda parte, qua sola displicere TIBI possem in hoc libro TIBI dicando, minimè quidem gravis ero, EXCELLENTISSIME BONANNI. Cùm enim notam omnibus, testificatamque vellem voluntatem meam erga optimum Parentem Tuum, TEque ipsum, Domumque totam, & maximè etiam erga Antonium fratrem, Ordinis nostri non exiguæ spei adolescentem, id indicium hujus animi mei præ ceteris cooptavi, ut TUO Nomini li-

literarium hoc monumentum a me elucubratum consecrarem; Cœnobitæ in paupere cella degenti convenientissimum. Parens enim tuus, non multis ab hinc annis iniqua sorte nobis ereptus, meritò laudatissimus Vir, humanitate verò insignis, ad Collegium Nobilium D. Caroli, Panormi recens excitatum, curæque nostrorum Patrum demandatum, cujus Collegii primus Moderator is erat, officiosissimâ Epistolâ, quam adhuc servo, jam decimus annus est, me accersivit; ut Mathematicis disciplinis, &, quod supererat, tempore Græcis etiam literis Iuventutem illam è Nobilitate Urbis eximiâ instituerem: præstare tamen id prohibitus tum fui impedimento collati mihi iisdem diebus muneris Philosophicas Facultates in publica Academia Pisana tradendi. Multùm tamen illi eo officii genere obstrictum me, devinctumque, satis bene novi. Ad idem Collegium TU ineunte adolescentia adcessisti; ut ad Philosophicas musas erudireris ab uno ex Nostris, qui Auditor meus Theologiæ in hac Urbe Florentiæ fuerat. Domi vero animum strenuè ad Principiorum Geometriæ stu-

ſtudium adplicuiſti; atque non parvos obtinuiſti progreſſus: dein Nauticarum rerum ſcientiis, ad quas Geometria viam ſternebat, multam operam navare eniſus; cùm illas ad munera Ordinis tui Hieroſolymitani, cuius Inſigne Crucis bimulus acceperas, propiùs ſpectare in poſterum poſſe exiſtimares. Et quidem, præter præclaras in Ordine dignitates *Commendatoris*, *& Balivi*, uti Italicè eas dicunt, quas etiam ante ætatem ab Inſtitutis Ordinis juſſam privilegio adſequutus es, brevi Præfectus Claſſis Triremium Ordinis es renunciandus. Hoc in munere herclè peramplo maritimarum rerum comparatâ ſcientiâ frueris; neceſſarieque antea quæſitam eam facilè noveris. Linguæ Græcæ ſtudio non nihil quoque domi addictum TE fuiſſe, adoleſcentem conſtat. Verùm illud profectò demirari oportet, infractos animos indutum TE fuiſſe in literarum hiſce occupationibus adversùs duo illa in ipſo ſtatim limine obſtantia repagula (perdito hominum more ne, an magis natura, dicam, neſcio) contra nempe Generis Claritatem ſummam, & ſummas Divitias: qua utraque re, item potentia,

tia,

tia, atque auctoritate ſupra Optimates totius Sicaniæ Regni domum Principis Cattolicæ præcellere, jam probè eſt exploratum. Ipſam vero ampliùs Pater tuus, nuper, ut dixi, fato functus, ex Hiſpaniarum Primi Ordinis Magnatibus, Aurei Velleris Eques, Regis utriuſque Siciliæ a Cubiculis Aureæ Clavis, nova dignitate, ornatuque novo cumulavit. Fraterque Tuus Ioſephus, Familiæ modo Caput, Patri quidem in Ordine Hiſpaniarum Magnatum ſuffectus eſt. Erat verò jam ante obitum illius a Cubiculis Aureæ Clavis ejusdemmet utriuſque Siciliæ Regis. Censùs opulentiam adjeci, ac laudi verti: & benè verti, MI BONANNI. Quoniam, uti Poeta ſapientiſſimè commonuit: *Et genus, & virtus niſi cum re* (opibus ſcilicet) *vilior alga eſt*. Non quod verè vilia; ſed nimirùm quòd ita humani generis ferunt Luxuries, atque Cupiditates. Igitur ea omnia, & delicioſæ vitæ maxima commoda mentem tuam à literarum arduis ſtudiis minimè abſtraxerunt. Sed contulit ad id, credo equidem, ſolida Pietas, quam cum vitæ integritate conjunctam ab adoleſcentia

tia

tia ita coluiſti, & conſectatus ſemper es, ut ab optimo quoque tum in Melitenſi Inſula Veſtra, ubi modo moraris, cùm ubique proberis. Hæc tam vera, & ab omni adſentantione remota, quàm publica, omnibuſque manifeſtè cognita in cauſſa fuere, ut Librum Nomini tuo inſcribere libentiſſimus ipſe decernerem. In illo Geometrica multa invenies, Lineas Curvas meditando: quarum nobiliores, & ad uſum hactenus magis adhibitas pro explicatione delegi; ceteris præteritis, illiſque pariter modò in hoc Opere, quæ ſenticoſa methodo analytica infinitè Minimorum in pertractando indigerent; quales curvæ ſunt poſteriorum temporum Catenaria, Elaſtica, Velaria; & id genus aliæ nonnullæ. Vale; & Deum O. M. ut vitam Tibi diutiſſimè à quibuſvis periculis ſoſpitem ſervet, quæſo, rogoque; TE verò, ut argumentum hoc animi mei erga Domum veſtram totam ex corde verè ſuſcipias, benevolentiâque complectaris.

Florentiæ Idib. Octob. CIƆIƆCCXL.

AUCTORIS SERMO

Ad Lectorem.

Cum univerſa Phyſica Scientia naturæ vim, effectus, cauſſaſque inquirere debeat; atque in ijs primo loco quæ motum corporum ſpectant, ſint edocenda; dein etiam ſententias, doctrinamque de Anima, ſeu de Corpore Animato debeat explicare; profecto manifeſtū eſt, illum germani phyſicarum rerum Præceptoris nomen jure ſibi vindicare, qui pariter Geometriam, & Artem Experientias naturales capiendi, atque illam, quæ Metaphyſica Scientia communiter nunc appellari ſolet, optime noverit. Quemadmodum enim Philoſophia univerſa in quatuor partes rectè diſtribuitur, unam, quæ definiendi, dividendi, ratiocinandi præcepta tradit; alteram, quæ de moribus, vitaque *communis officijs dijudicat, tertiam, in qua de humana mente, & voluntate, deque earum proprietatibus edisseritur, quæ Metaphysica scientia est, quam nuper diximus, postremam verò, quæ res à natura involutas acutè investigat; ita hæc ultima pars, quæ est Physica disciplina, Metaphysicas litteras sibi adjunctas exposcendo, ex illis tribus facultatibus verè constituitur, & planè, perfectèque coalescit. Igitur quô quis magis, ac diligentiùs tres hasce ipsas partes sibi quæsitas, comparatasque habuerit, atque ad illas pro se animum intenderit [si enim unâ, aut alterâ is indigeat, multum ei deest ad veri Physicæ Scientiæ Præceptoris nomen, dignitatem, & publicam existimationem dignè promerendam, sibique adsumendam]; eò magis & Physicam Scientiam tenebit, & idoneus erit ad alios illâ instituendos, & denique longè alteri est præferendus, qui non æque partes eas omnes retinuerit: si tamen fraus aberit, si impudentia, si favor, & gratia pro alterius caussâ, si studium partium Adversariarum, si deceptio, si denique turpissima exquisita captatio Auditorum. Quæ Utinam hac nostra ætate sæpissimè non evenirent; & fucum veritati facerent, os verò multitudini malo fato sublinerent. At vera virtus, vera sapientia, vera doctrina possessio rem ipsam spectat, & expetit; inanes eventus adspernatur. Quid enim, quæ plena sunt futilitatis, plena summæ levitatis, frustra curare? Et in eum quoque locum non rarò veneris, ut pudeat te etiam animum ad illorum cogitationem deijcere.*

ijcere.

ijcere. Sed quæ in Physicæ præceptore necessariò requiri ostendimus, o utinam in nobis essent id munus gerentibus; esse quidem vehementer studemus. Quantùm autem simus infirmi, satis intelligimus. Geometriæ cum Physicis necessariam conjunctionem demonstrare, quis otio iniquissimam vim inferens anno millesimo septingentesimo quadragesimo suscipiet? Præstantissimus omnium Veterum Philosophorum, & Naturalium rerum Investigatorum fuit Thales Geometra, Jonicæ Scholæ princeps: cujus proximus memoratur Ameristus Sterichori Poetæ frater in Geometrica arte subtilissimus. Italica secta, Jonicæ proxima, magno Pythagora duce, Neapolitani Regni, ubi primi ortus, & incunabula illi extiterunt, præclarum, æternumque decus, Geometrian etiam coluit. Posthac magna aperta cavitas Geometriæ cum Physica copulatæ ad Platonem, & Academicorum fere familiam usque extensa commonefecit plane, quot levia, quot vana, quot fallacia, quot per solam incalescentem mentem excitatæ commentationes in Physiologia absque Geometriæ præsidio possint effundi. Et analyticam etiam methodum Plato dicitur ad Physicarum rerum perscrutationem adplicuisse; quæ id, de quo quæritur, ad sua principia inversè reducit, methodorum omnium optima. Sed post Platonica tempora diffractus rursus Geometriæ ad Physicam adhibitæ funestus hiatus. Verùm non bonam sectabantur ijs temporibus Physicã; ne dicam eam pravam: neque illustres emicuerunt Sectarum Institutiones. De quot enim supervacaneis

in

in dialectica Stoici inquirebant? Qui solis argumentationum fallaciis, verborum argutis captionibus, sententiarum cavillis impetere ambitiosius, & magnificè sese jactitabant. Sat erit Zenonis, Stoicæ sectæ ducis, & parentis argumentum in memoriam redigere, Achillem ob putatam invictam strenuitatem nominatum, quo illi utebantur ad motum tanquam rem impossibilem comprobandam (ad quam majorem insaniam poterant per sophismata duci!) quod erat, Achillem nunquam testudinem animalium omnium tardissimam adsequuturum, etiam si centies illâ velociorem, si per quodvis finitum spatium, dum ambo moveri cœpissent, ab illa distaret. Ridicula hæc profecto, & futilia cogitabantur, facillimæ Geometriæ, sive Scientiæ proportionum ignoratione; cùm per illam ad quot passus etiam Achilles ad animal sit perventurus, plane noscatur. Egregia Physica sunt Archimedis de æquiponderantibus, & insidentibus humido, quæ per Geometriæ principia mirificè perducta fuerunt. Galileus maxime omnium Geometriæ doctrinam ad naturalem Philosophiam, præsertim ad disciplinam de motu, accomodavit; eamque hac viâ quammaximè provexit. Cartesiana verò Physice, & Newtonica, seu Physico-Mechanica, quantùm, præcipue secunda, Mathematicis rationibus inhæreat, illisque sese substentet, perspectius est, quàm ut oratione nostra demonstretur. Profecto quomodo doctrinam motuum Corporum rectè administraris, ejusque institutiones, & motuum ipsorum leges Auditoribus dilu-

dilucidè explanaris, absque adjumento Geometriæ? In Physices principiis Auditoribus nostris tradendis, post illa constituta, gressu brevissimo ingredi in explicationem de Corporum motu debemus; nisi aut in Historia, aut in commenticiis hypothesibus vel aliorũ enarrandis, vel nostris condendis vanas terere moras velimus, nosque calamitose implicare. Mechanica, inquies, scientia tum ea erit, non Physica. Hæc, & id genus alia quàm temere, & inconsultò, quàm indoctè de Geometria cum Physica disciplina minùs quidem advincienda effutiuntur; tùm ignoratione illius, cùm subdolo artificio ad Auditorum numerum studij facilitate ad se conciliandum, absque altero amovendum! Nonne agendum in Physicis est, certè prima elementa proponenda sunt, de motu corporum æquabili, atque accelerato, de descensu Corporum gravium per plana ad Horizontem erecta, & per plana ad Horizontem inclinata, de motu projectorum; quædam etiam necessariò perstringere oportet de resistentia solidorum tàm verticaliter, quàm horizontaliter suspensorum: & alia ejusmodi. In meteoris manifestè opportunitas Geometriæ perspicitur; maximè cum Iridis naturam, proprietatesque Auditoribus intelligendas adferimus; ceteraque in eodem Physico argumento aggredimur illustranda. Sine Geometriæ adminiculo non nisi exilia, non nisi contemnenda de Iride proferes; non nisi prætenuia in mirabili Cælesti Arcu, ejusque perjucunda varietate deprehendes. Quid sine Geometria Physica tota Cælestis erit, non modo Astronomia, de qua nunc

nunc non est quidem sermo habendus) nonne vana nomina; & perperam collecta paucarum in Cœlis visarum rerum congeries? Alias, & longè interiores Geometricas litteras Mechanica complectuntur. Dum isthæc dico, sola Elementa Geometrica necessaria Adolescentibus esse ad rectum Physicæ studium instituendum, dico; non Geometriam universam, ac reconditiorem: idque in hanc partem ita accipio: quod palam, & publicè profiteor. Sed nonnulli sunt, qui nullam, aut penè nullam Geometriam in rebus Physicis exposcunt, ducuntque necessariam. Metaphysicorum verò cognitionem obtinere Physicæ Pręceptores debemus ob ea, quæ de Anima, seu de Corpore Animato in physica disputamus. Etenim de Anima in Theologia sermo instituitur, pro eo, ut divina, & cœlestia pars hæc corporis continere potest; in Metaphysicis autem proprie, & convenienter passiones ejus enarrantur ad mentem, voluntatemque pertinentes; neque de sensibus peragitur, aut parum quidem; neque de Anima cum Corpore colligatâ, unâque simul agente; sed in Physiologia investigantur proprietates animi arcto vinculo cum corpore constricti; illiusque natura, & constitutio, sedes in corpore, agendi modus per sensus, & alia hujusmodi inquisitione expenduntur; quantùm quidem hæc cognitione nostra complecti nos possumus, & dicendo explicare. Hinc intelligis non ita quæ in Thelogicis, verùm sanè, quę in Physicis, & Metaphysicis de Anima queruntur, multa cognatione simul contineri. Atque duæ sunt præstantiores

hoc

hoc nostro ævo [sed & etiam, credo, si præterita tempora respiciantur] dissimiles, aut etiã contrariæ Metaphysicarum rerum doctrina, Cartesij una, altera Lockij, insignium ad laudem virorum; quæ diffidentibus principijs insistunt. In ambas plane tenendas, differentiasque probe callendas Physicæ Institutor omni cura, meditatione, diligentia incumbere pro viribus debet. Reliqua pars est Experientiarum naturalium pertentandarum ars, & exercitatio. Duobus modis perficere id licet, ut nostrum munus, uti opus, præstemus; primo si experimenta ipsa nos ipsi capiamus, naturæ recessus latitantes indagando; secundo, si, cum proprijs deficimur, aliena sumamus, exploratissimis, ac certissimis, quantùm quidem cernere potuimus, selectis, & apud Auctores compertis, cùm sollertiâ, & acutâ perspicaciâ, tum veracitate, dein etiam nulla anticipatione sententiæ antea animo informatæ integram fidem rei facientes. Hæc enim tria vel in eo, qui transcripsit, vel in eo qui accepit ipse Experimenta, deposcuntur, ut illi fidere impunè possimus. Non equidem refragabor dicto, rectiores esse proprias, quàm alienas experientias. At multa sunt impedimenta, quibus ægrè quidem nisi Principum voluntate, & Potentia prospicietur. Interea consilium est capiundum: & ex alijs excerpas, quæ optima sunt, si tua, & meliora non habeas. Illud tamen vituperandum semper ego judicavi, de suo penu nihil unquam promere, & aliena jugiter è sublimi deridere; aut censura notare. Quid ab æquitate alienum

magis,

magis, quàm si per ora omnium traducantur eximiorum Philosophorum nova inventa per verissima, atque constantissima experimenta, & per valida rationum argumenta peracris ingenij conatu in naturæ abstrusioribus penetralibus investigata? Universe enim ferri nequit, uti valde iniquum, sententiæ alicujus Auctoris non adsentiri, resistere etiam, quam, præter interiorẽ veritatem, præstantiores ingenio, & doctrinâ Viri, quã communis Accademiarum consensus, quam ceteri omnes in doctrina ea eruditi acceperunt, probaruntque; si qui illi adversantur, nihil habeant, & prodant, neque habere, & prodere posint, quod valeat ad contrarios sensus de re illa firmos reddendos. Eòque magis, si novum inventum fuerit probatum, etiamsi novitas obstiterit, etiamsi bellum quoque in illud inlatum fuerit a communi quodam cœtu, vel ob dissimiles nationum indoles, & illarum res contrarias, vel alia quapiam de caussa. Quot erant, quæ Gallos a Newtonicis Physicis decretis, atque a methodo naturalia perscrutandi porrò arcere debebant, & Cartesianis principijs fortiùs devinctos, totosque dicatos retinere? Attamen plerique Galli, ubi severissimâ trutinâ examussim fuerint Newtonica nova excogitata perpensa, & disceptationi multa, mente etiã, voluntateque adversa, omnia submissa, in non paucis ad alia castra transfugerunt. Meritò ne, ac jure, ut exemplum unum adferam, Kepleri, & Newtoni nova Physica principia Attractionum, atque Newtoni nova inventa de colorum generatione tot rationibus,

nibus, & apertissimis experientijs irerum, ac sæpius tentatis, roborata, à gente omnium Philosophorum probata, suscepta, maximi habita, & ab ijs, qui suorum amantissimi, quæ sua non sunt, oderunt, & adspernantur, cerrè qui alienis propria nunquam non anteferunt, aut falsitatis argues, aut tantillùm quoque elevaris, solâ pronunciatione, & fallaciæ divulgatione, solis levibus dictis, nec rei naturâ quidem penetratâ? Novæ captæ contrariæ experientiæ publicæ faciendæ sunt; & compertarum rationum solida argumenta exponenda; quæ testimonia sunt veritatis. Non scenico ludo, sed rationum momentis est decertandum. Cùm Principiorum Geometriæ vera cognitio, quæ verè, & reipsa non per vana spectra, & imagines ad Physicas Scientias a nonnullis satis docte adjungi solet; maxime ad res ipsas Physicas valeat; atque eâ valde in illis sit opus; Lineæ Curvæ in primis necessariæ in hunc finem iudicantur; præcipuè ad Mechanicarum disciplinarum, & Motuum Corporum intelligentiam. Qua de re Lineas Curvas magis insignes cùm Geometricas, tùm Mechanicas hactenus memoratas explicandas aggressi sumus, uberiùs quidem hæc scribere volentes: nam certo non hæc omnia ad Physicæ studium, & literas necessaria esse, manifestum est: neque id propositum nobis fuit statuere; cùm Elementa sola Geometriæ Euclidis, Apollonij præjacenda esse, ac rectè adolescentum animos præparare debere dicamus; ut in Physicæ Scholam inauguratò concedant: quod jam supra palam confessi sumus. Librum in capita dispertivimus, non per Lemmata, Problemata, Theoremata distribuendo, quæ in eo continentur; exemplo aliorum etiam

tiam Geometrarum præcipuè Wallisij, & Nicolai de Martino, Neapolitanæ Academiæ Regij Mathematum Professoris, Geometræ præcellentissimi, quod Mathematica ejus opera hactenus in lucem edita manifeste indicant: neque eum credo quadragesimum adhùc annum attigisse: qui præceptor meus in primis Geometriæ principijs fuit [cetera enim hujus disciplinæ per nos ipsos, male quidem, necessariò quærere nobis cogebamur]; carissimus, ac dulcissimus præceptor; vir honestate, humanitate, facilitate plenus; nulla professoria labe perfusus. Nonnulla ex his, quæ tradimus, abs alijs quidem commemorata fuere: & Curvæ sunt enunciatæ. Verùm ea ipsa amplius hic adaucta invenientur, & latiùs producta: id verò est, quod semper Geometræ efficiunt: maximè autem modus singularum Curvarum varia genera, & species varias infinite protendendi multò largiùs pertractatus est, & commonstratus. Quædam etiam primò inventa. Atque de Curvis omnibus ita quidem in unum collectis, cum novis additis, & methodis tàm pleno stilo præbitis infinitè eas protrahendi, neminem, credo, adhuc scripsisse. Hæc pauca de nostro libro in hujus sermonis fine adjecimus ad solam historiam, & ad perbrevem ejus notionem, uti par erat, initio præfigendam. Alia non subnectimus. Pyrgopolinicem agere nullo pacto laboramus: quem in præfationibus interdum referre Scriptores mihi videntur, dum de suo Libro tot, tantaque præfati ea in illo esse ostendere, persuadereque aliis enituntur, quæ in suo Clypeo curari gloriosus miles imperabat; Curate, ut splendor meo sit Clypeo clarior, Quàm Solis radii esse olim, cum sudum 'st, solent.

IN-

INDEX CAPITUM.

CA-

LINEARUM CURVARUM
ELEMENTA

Ad Scientiarum Mechanicarum, & Motuum intelligentiam maxime necessaria.

Linearum curvarum contemplationem non modo Geometris, sed ipsis quoque Physicis, & Astronomis perquam utilem, ac necessariam fore omnes quidem norunt. Geometris enim necessaria eorum notio existimatur; ut mutua ipsarum intersectione problemata ad quantitatem continuam pertinentia construi rite possint: Physicis autem, & Astronomis; ut motus Corporum, & Astrorum exacta curvarum, quas describunt, cognitione tutiùs definiantur. Hinc mirum nil est, si recentiores tàm Geometriam, quàm Physicam, & Astronomiam novis, peregrinisque inventis adauxerint; quandoquidem partem hanc Geometriæ, quæ de lineis curvis agit, longe diligentiùs, quàm Veteres, excoluerunt.

Etenim Veteres, ubi in circuli consideratione diu fuerunt versati, satis noverunt, non omnia Geometriæ problemata circuli, & rectæ lineæ intersectione posse administrari; attamen opus esse, alias curvas circulo compositiores in Geometriam inferre, ut earum vel cum circulo, vel mutua intersectione constructio aliorum quoque Geometriæ problematum obtineretur. Hinc illas curvas lineas sibi primum contemplandas proposuere, quæ ex varia Coni per planum sectione ortum trahentes nomine sectionum Conicarum vulgo appellantur. Et quamvis non satis constet, qui primus inter ipsos illas consideraverit, attamen, si Pappo Alexandrino fides sit præstanda, scripsit de iis quatuor libros Euclides, quos cum explevisset Apollonius Pergæus, iisque quatuor alios adiunxisset, octo Conicorum libros confecit.

Sed cum noverint deinceps neque circulo, neque ipsis Conicis sectionibus posse omnium Geometriæ problematum constructionem absolvi, considerarunt quidem alias lineas curvas altioris ordinis; quales sunt Cissoides Dioclis, Conchoides Nicomedis, aliæque fortasse quamplures, quarum nulla ad nos memoria pervenit. Sed tamen lineas hasce magis compositas indiscriminatim pertractarunt; neque ullo ordine illas distinxere; quinetiam, ut ex eodem Pappo colligitur, crediderunt eas omnes ejusdem esse indolis, & naturæ, ejusdemque conditionis cum curvis illis lineis, quæ varium, & mutabilem ortum habentes nulla quidem Geometrica constanti ratione possunt describi; quales profecto sunt spirales Archimedeæ, & quadratrices Dinostrati, ac Nicomedis. Quandoquidem utrumque Curvarum genus in Problematum superioris ordinis constructionem indistinctè ab ipsis adhibebatur.

Verè tamen Veteres tria problematum Geometricorum genera distinxerunt, ut animadvertit Pappus Alexandrin. in Collectionibus Mathem. Et dixit Cartesius in Geometria; alia *Plana*, alia *Solida*, & alia *Linearia*. Erant *Plana*, quæ solvebantur, & construebantur per lineas rectas, aut per circulum; utraque enim linea in plano ortum habet. *Solida* vero quæ construebantur per unam, aut plures Sectionum Conicarum. Nam hæ lineæ per sectionem in solido, idest in Cono, generantur. Et tandem *Linearia* ea dicebantur problemata, in quorum constructionem aliæ lineæ compositioris generationis assumi debebant. Hæc probarunt quidem Recentiores Geometræ; sed ulterius progressi problemata linearia in varios ordines diviserunt; & ipsas lineas Curvas, quæ in eorum constructionem adhibentur, non quidem indiscriminatim, sed in certas quoque classes distinctas considerarunt. Hinc, sicuti priscis Geometris magnum scelus videbatur, cum problema planum per solidum, vel etiam problema solidum per linearia inveniretur; ita apud recentes Geometras id ipsum est quidem vitium: sed amplius, maximus erit error, si aliquod problema lineare ex improprio Curvarum genere solvitur. Pro variis enim problematum linearium speciebus variæ itidem dictæ lineæ curvæ compositiores debent adhiberi.

Ceterum Linearum curvarum Elementa nos tradituri ad intelligentiam scientiarum motuum, de quibus præsertim in nostris Philosophicis institutionibus peragitur, non id quidem nobis proponemus, ut quæcunque ad hanc materiam pertinent, afferre debeamus, atque præbere; neque ut libros integros dictarum linearum, ac Sectionum Conicarum per problemata, ac Theoremata exponamus; sed tantum, ut postquam de natura linearum curvarum in genere egerimus, simulque vulgatam illam distinctionem in lineas curvas Geometricas, & Mechanicas paulo clariùs explicaverimus, debeamus per varia capita propriam earum Curvarum naturam declarare, quas hactenus speciatim Geometræ sunt contemplati; & quæ ad nuper dictum propositum institutum spectare videntur. Quod vero pertinet ad methodos illas novas generales pro Curvarum Geometricarum proprietatibus detegendis adinventas, idest, ad ipsam analyticam Algebram postremo excogitatam, & utrique curvarum generi communem, in paucis locis ea nos utemur in his exponendis; ubi solum necessitas ad id nos adiget. Cum verò, uti modo diximus, Scientia hæc linearum Curvarum ad intelligentiam multorum, quæ in Physicis traduntur, maximè ad doctrinam motuum spectantium sit unicè necessaria; quod nemo bonorum Philosophorum harum tempestatum non novit; explicavimus illam nostris Auditoribus in Scholis quidem privatis domi paullo constrictiorem, anno 1738, & 1739. stilo Romano, a Mense Novembri ad Majum; dum eo tempore Physicam generalem, seu Principia, & Institutiones Physicas publicè tradebamus, anno antequam in magnis feriis æstivis Patriam urbem post sexdecim, & plures annos iterùm inviseremus.

CA-

CAPUT I.

Natura Linearum Curvarum generatim aperitur.

Ut Linearum Curvarum natura generatim fiat nota, præstat rem paulo altiùs repetere; ac nonnulla præmittere de natura problematum geometricorum. Nam, cum lineæ Curvæ, ut inferiùs constabit, aliud omnino non sint, quàm loca, sive series punctorum, quæ alicujus problematis Geometrici indeterminate propositi solutioni satisfacere possunt; utique earum natura nulla meliùs ratione fieri poterit perspecta, atque cognita, quàm si intellecta sit priùs natura problematum Geometricorum. Problemata Geometrica ad duas species revocantur. Alia dicuntur Determinata, quod determinatum numerum habent solutionum; alia dicuntur Indeterminata, quod infinitis modis solvi possunt. Exemplum esto. Si recta quædam linea dividenda proponatur, ut rectangulum sub segmentis æquale sit quadrato lineæ rectæ; palam est, problema esse determinatum; quia duo sola puncta in proposita recta linea inveniri possunt quæstioni satisfacientia. At vero, si dumtaxat quæratur rectangulum, quod dato quadrato sit æquale; problema erit indeterminatum; cum infinita rectangula possint inveniri, quorum unumquodque adæquet quadratum datum rectæ lineæ; atque idcirco omnia rectangula sibi mutuo erunt æqualia.

Rursus in quolibet problemate geometrico duo necessario continentur, *Notum*, sive *Datum*, & *Incognitum*, sive *Quæsitum*: sicuti in omni Theoremate duo

duo includuntur *Hypothesis*, & *Conclusio*. Etenim, si quod proponitur, nihil aliud contineat præter Notum; id utique non erit Problema, sed *Axioma*, idest propositio notissima; at si nihil aliud complectatur, quàm vel aliquod obscurum, sive novum, facillimum perfectu; & fiet *postulatum*, quod adhuc non est probatum; licet facile possit admitti; vel aliquod incognitum; & erit problematis solutio planè impossibilis, sive non erit problema. Cum enim mentis nostræ limitatio id quidem ferat, ut ex cognitis possit tantùm aliquid eruere; profecto, si nullæ adsunt conditiones, nullum nobis suppeditabitur medium, quo, id, quod quæritur, detegere valeamus: & per consequens problematis solutio fit nobis impossibilis. Jam vero, quemadmodum plerumque præter conditiones necessarias, aliæ etiam adiunguntur superfluæ, ac reiiciendæ, ut problematis solutio possit obtineri; ita aliquando non omnes adponuntur conditiones, quæ ad solutionem problematis sunt necessariæ: & tum problema fit indeterminatum, infinitas nimirum admittens solutiones.

Etenim problema determinatum hac parte differt a problemate indeterminato, quod statim reddetur indeterminatum, certisque modis solubile, si adiungantur, quæ deficiunt, conditiones ad determinatam solutionem necessariæ. Sit A B recta linea, quæ ita debeat dividi, ut rectangulum sub segmentis æquale sit quadrato datæ rectæ lineæ H. In hoc problemate duæ insunt conditiones; una, quòd latera rectanguli simul sumpta æqualia sint datæ rectæ lineæ: altera, quòd ipsum rectangulum æquale sit dato quadrato. Hæ conditiones satis sunt ad problematis determinati determinatam solutionem. Nam si super data recta linea A B Semicirculus describatur ACDB; atque ex extremitate una erecta perpendiculari A E,

Fig. I.

quæ

quæ sit æqualis datæ rectæ H, agatur per punctum E recta linea E C D parallela ipsi A B; & ex punctis C, & D, in quibus ducta parallela semicirculum secat, demittantur C E, & D G eidem A E perpendiculares, erit quæsitum rectangulum tam id quod fit ex A F in F B, quàm id, quod ex A G in G B. Et quidem utriusque rectanguli latera adæquant datam lineam A B; & utrumque est æquale quadrato rectæ lineæ datæ H; quod quærebatur.

Sed nihilominus, si eidem problemati præter duas illas conditiones tertia adponatur, scilicet quod segmenta rectæ lineæ datæ A B, sive etiam latera rectanguli inveniendi debeant esse in data ratione, manifestum est hanc conditionem ad problematis resolutionem esse plane superfluam, immo ipsum per illam reddi impossibile; cum problema per duas priores conditiones satis apte determinetur. Quamobrem, cum problema tribus iis conditionibus proponitur, nonnisi duæ sunt considerandæ; & inveniendum est vel rectangulum dato quadrato æquale, & cujus latera simul sumpta datam rectam lineam adæquent; vel rectangulum; quod dato quadrato æquale habeat latera in data proportione; vel denique rectangulum, cujus latera sint mutuo in data proportione, & simul sumpta datam rectam lineam adæquent. Nam, quemadmodum hujusmodi rectangulum in primo casu per solas illas duas conditiones optimè determinatur; ita etiam in reliquis duobus casibus per conditiones in iis adpositas satis apte definitur.

At vero si ex eodem problemate auferatur una conditio, scilicet quod latera rectanguli inveniendi æqualia esse debent datæ rectæ lineæ; & dumtaxat proponatur inveniendum rectangulum, quod sit æquale quadrato datæ rectæ lineæ H, perspicuum est, propter defectum alterius hujus conditionis problema indeter-

Fig. 2.

determinatum evadere, & infinitas recipere solutiones. Etenim si Circulus quilibet describatur A B C, eumque contingat in puncto A, recta A D, quæ ipsi H sit æqualis, & ex puncto D ducantur infinitæ rectæ lineæ D C, quæ circulo in duobus punctis B, & C occurrant; ob notissimam circuli proprietatem palam est, unumquodque rectangulorum B D C æquale esse quadrato, quod fit ex tangente A D, sive etiam ex data recta linea H, cui ipsa A D ex constructione est æqualis. Quocirca, ut problema tali pacto propositum determinatum fiat, certumque numerum solutionum diversarum admittat, supplenda est ei conditio deficiens, ex arbitrio; & quærendum est vel rectangulum, quod dato æquale quadrato habeat latera in data proportione, vel etiam cujus latera simul sumpta datam rectam lineam adæquent.

Ex dictis observandum, quod quemadmodum problemata indeterminata, determinata reddi possunt, quoties conditiones iis deficientes adponuntur; ita vicissim problemata determinata reddi possunt indeterminata, cum aliquæ ex illis conditiones auferantur; atque hoc generatim sit dictum; quomodocumque problemata determinata reddantur per ablationem conditionum indeterminata; sicuti etiam generatim fuit dictum de problematis indeterminatis quomodocumque redditis determinatis per conditionum adiectionem. Nam, sicuti cum quæritur rectangulum, quod simpliciter dato quadrato sit æquale, inveniri possunt infinita ejusmodi rectangula, ex quibus tamen non nisi unicum inserviet quæsito; cum latera ipsius rectanguli simul sumpta æqualia esse debeant datæ rectæ lineæ; sive cum problema est determinatum; Hac ratione cum quæritur rectangulum, quod dato quadrato sit æquale, & cujus latera simul sumpta datam rectam lineam adæquent, unum tantummodo est, quod

quod quæsito satisfacit; cum tamen infinita possint inveniri rectangula, si vel latera rectanguli inveniendi nequaquam oporteat, ut datam rectam lineam simul sumpta adæquent; vel etiam si ipsum rectangulum inveniendum minimè esse debeat dato quadrato æquale.

Advertendum secundo, quòd problema determinatum redditum indeterminatum, dempta aliqua conditione, ut dictum est, non solum adiecta conditione ablata ad primum problema revocari potest, sed infinitis quoque modis diversis potest determinari; ut non pristinum, sed novum efficiatur problema determinatum. Ita; cum quæritur rectangulum dato quadrato æquale, & latera habens datæ rectæ lineæ æqualia; una, aut altera conditione dempta, redditur indeterminatum problema; & iterum adposita una, vel altera ablata conditione, efficitur idem problema determinatum. Sed tamen, si, uti antea, quæratur rectangulum dato quadrato æquale, cujus latera sint æqualia datæ rectæ lineæ; tum dempta illa conditione, quòd latera sint æqualia rectæ lineæ, & adjecta hac nova, quòd latera sint in data ratione, ex indeterminato fiet novum problema determinatum, non quod erat antea. Verùm tamen est, minimè ex arbitrio nostro plerumque pendere, quòd problemata determinata reddantur indeterminata hoc, vel illo modo; & quòd indeterminata reddantur quoque determinata hoc, vel illo modo, qualibet adposita conditione. Nam ab aliis solvenda nobis stata, certaque ratione problemata plurimùm solent proponi. Hæc dicta sunt; ut probe noscatur a Tyronibus problematum indeterminatorum, & determinatorum natura, ac differentia. Quod vero dictum est de problemate determinato reddito indeterminato vicissim est dicendum de problemate indeterminato reddito determinato.

His positis; quemadmodum Rethores loca sibi con-

constituunt, ex quibus sua deinceps ad persuadendum argumenta facili negotio educunt; ita etiam Geometræ infinitos illos casus problematum indeterminatorum in ordinatas series disponunt, quæ *loca Geometrica* constituunt, ita dicta: & quæ in serie punctorum linearum vel rectæ, vel Curvarum, de quibus modo agimus, profecto consistunt: atque, ad hæc loca Geometrica confugiendum est, cum problema est enodandum. Id satis veteribus Geometris perspectum hoc eodem ordine fuit. Quare hanc de locis Geometricis doctrinam multo pretio habuerunt; uti testis est Pappus Alexandrinus, qui initio Libri septimi collectionum Mathematicarum, scribens ad Filium Hermodorum, *Locus*, inquit, *qui vocatur resolutus, ut strictim dicam, propria quædam est materia post communium elementorum constitutionem, iis parata, qui in Geometricis sibi comparare volunt vim, ac facultatem inveniendi problemata, quæ ipsis proponuntur: atque hujus tantummodo utilitatis gratia inventa est.*

Fig. 3.

Quod ut clarius exemplis innotescat, quæratur rectangulum cujus latera sint in data proportione. Ponatur quævis recta linea A B, & ei adhæreat ad quemvis angulum alia recta B C; & sit A B ad B C in data dicta ratione. Modo jungantur puncta A, & C rectâ lineâ A C; palam est, in linea A C esse ordinatam seriem infinitorum valorum quæsiti problematis; ad quam adeundum, cum rectangulum quæritur, cujus latera sint in data dicta ratione: idest in linea A C adest infinita series punctorum satisfacientium problemati. Nam ductis quibuslibet lineis M N in triang. A B C parallelis basi B C, erit semper A B, ad B C, ut A M, ad M N. Quare rectangula omnia, quorum unum latus sit A M, alterum M N, satisfacient problemati indeterminato; habebunt enim latera, in data dicta ratione.

Eodem

Fig. 4.

Eodem modo si quæratur rectangulum quod incognito quadrato æquale habeat latera, quæ simul sumpta datam rectam adæquent; positâ A B datâ rectâ lineâ; si super ea tamquam diametro describatur circulus A N B; series disposita punctorum N in peripheria erit locus Geometricus, seu sedes punctorum infinitorum, quæ problemati indeterminato satisfaciunt, continentia infinitos quæsitos valores. Nam, ductis ex punctis N normalibus ad A B, secantibus ipsam in M, erit semper rectangul. A M B æquale quadrato M N, ob circuli naturam. Atque hac quidem ratione per dispositionem in ordinatas series, seu in infinita linearum puncta, contemplatio infinitorum casuum problematum indeterminatorum, & contemplatio maximè Linearum Curvarum ipsis Geometris subnascebatur.

CAPUT II.

DISTINCTIO CURVARUM In Geometricas, & Mechanicas exponitur.

Nihil frequentius apud Geometras occurrit, quàm vox *Geometricum*, quæ ex ipso Geometriæ vocabulo promanavit: sed ex altera parte nihil apud eosdē magis in abdito fuit positum, quàm hujus vocis significatio. Quidam enim adeo arcte illam accipiunt, ut id duntaxat Geometricum vocent, quod Circulo, & recta linea confici potest. Alii autem tam late, ut ut omne id pro Geometrico intelligant, quod omnino perfectum, atque exactum est, sive circulo, sive qualibet alia fiat ratione. Hinc distinctio curvarum in Geometricas, & Mechanicas pendere dici sane potest.

Veteres, qui res Geometricas semper ad praxim traducebant; ipsamque Geometriam veluti disciplinam contemplabantur, quæ non tam rationem, idest mentem, perficeret, quàm ad vitæ usus foret accomodata; id solum Geometricè factum dicebant, quod Circulo, & recta linea conficiebatur; & quod consequenter solo Circino, & Regulâ poterat ad praxim revocari. Ratio est, quia in problematum resolutione non alius erat Veterum scopus præcipuus, quàm facilitas, sive expedita ratio operandi in quæsito inveniendo: ita ut Circulo non minus uterentur in eorum problematum resolutione, quorum locus, sive sedes est in ipso Circulo, sive in lineis ei adgnatis, sed etiam in resolvendis iis problematis, quæ cum sint plane simpliciora, per solam rectam lineam possunt administrari. Unde, quia aliarum Curvarum descriptio non tam facile obtineri posse ab ipsis cognoscebatur, quemadmodum Circuli circumferentia, quæ unius circini ductu in plano describitur; hinc est, ut id solum dixerint Geometricè fieri, quod Circuli circumferentia absolvebatur.

Atque hanc unice fuisse Veterum mentem pluribus quidem rationibus ostendi potest. Nam primo si non ad facilitatem operandi, sed ad solam naturæ simplicitatem, sive ad simplices nostræ mentis notiones in problematum resolutione animum adplicare ii voluissent, merito reprehensione dignus esset Euclides; qui postquam initio libri primi suorum Elementorum sibi concedi postulavit, ut quovis centro, & quovis intervallo Circulus describatur; deinde propositione secunda resolutionem aggreditur ejus problematis, in quo ad datum punctum oporteat rectam lineam applicare datæ rectæ lineæ æqualem. Et propositione tertia subjungit solutionem alterius problematis, in quo datis duabus rectis lineis inæqualibus ex majori portio æqualis minori debet abscindi. Quandoquidem, si rem intimius consideremus, majorem, aut saltem æqualem difficultatem mens nostra experitur in intelligendo circa datum centrum descriptum Circulum cujusvis intervalli, quàm in concipienda ad datum punctum applicata data recta linea, quæ alteri datæ sit æqualis; aut etiam ex majori recta linea abscissa portione, in concipiendo, quæ minorem adæquet.

Nec profecto alia ratione ab hac negligentiæ nota vindicabitur meo judicio, & sententia Euclides, quàm dicendo, Veteres Geometras non tam ad simplices nostræ mentis conceptus, quàm ad faciliorem operandi rationem in problematum resolutione inspectionem accomodasse; ita enim facile ratio intelligetur, quamobrem circuli descriptionem dato centro, & intervallo in postulatorum numero reposuerit Euclides; & tamen speciali solutione digna existimaverit duo illa problemata, quæ in secunda, & tertia propositione primi libri continentur. Nam, ut Circulus dato centro, & intervallo describatur, satis est intervallum illud circa datum centrum eo usque rotare, donec ipsum ad locum redeat, unde cœperat moveri: id quod solius Circini ope satis apte obtinetur. Sed tamen, ut ad datum punctum recta linea adplicetur, quæ alteri datæ sit æqualis; aut etiam, ut ex majori rectâ lineâ portio abscindatur, quæ datam rectam lineam adæquet, describendus esset ex dato illo puncto, aut etiam ex una extremitate lineæ majoris Circulus habens pro intervallo ipsam rectam lineam

lineam datam: quod tertio Euclidis postulato procul est ut fieri possit, nisi prius data recta linea dato puncto, aut etiam extremitati lineæ majoris adplicetur.

Quippe notandum, tertium Euclidis postulatum non ita quidem sumi debere, ut centro, & intervallo, utcumque in plano positis, possit semper Circulus describi; sed tantùm cum centrum datum est in una ejusdem intervalli extremitate; sive cum centrum, & intervallum in una ipsius intervalli extremitate coniunguntur. Unde, quotiescumque datum centrum minime cum una intervalli extremitate coniunctum existit, quemadmodum contingit in secundo, & tertio problemate, primi libri Elementorum; Circuli descriptio, vi ejus postulati, nequaquam poterit obtineri, nisi prius ad datum centrum applicetur recta linea, quæ dato intervallo sit æqualis. Hanc esse veram illius postulati intelligentiam probatur, tum quia hac semper ratione eo utitur Euclides, nec alio casu Veteres ejus interpretes duo illa problemata solius circuli ductu resolvunt, nisi cum in primo datum punctum fuerit in extremitate rectæ lineæ, & in secundo cum duæ rectæ in uno extremo coniunguntur; tum etiam quoniam, si tertium illud postulatum suam quoque vim haberet, cum centrum, & intervallum minime in una ipsius intervalli extremitate coniuncta existunt, secundum Euclidis problema tertio postulato non modo intellectu, sed etiam factu facilius foret; quandoquidem tum pro tertio postulato primo quidem deberet adplicari ad datum centrum recta linea dato intervallo æqualis; ac deinde recta illa linea eo usque circa datum punctum deberet rotari, donec ad eum locum rediret unde cœperat moveri; cum tamen in secundo problemate id tantum quæratur, ut ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualis recta linea ponatur.

Ampliùs, Veteres in problematum resolutione verè solam facilitatem considerarunt, & id Geometrice solum factum dixerunt, quod circulo, & recta linea conficitur hac ratione; nam hæsitarunt Conicas sectiones in problematum resolutione adhibere; quia tunc temporis difficile erat eas in plano describere; atque ita, quod ope ipsarum obtineretur, ad praxim reducere. Apollonii enim conatus in Elementis Conicis uberius, & universalius elaborandis, quàm ab omnibus aliis factum fuerit, qui ea de re scripserunt, non sine maxima laude a veteribus Geometris exceptus fuit; quin id ipsum magni Geometræ nomen ei peperit, quod hanc materiam omnibus numeris absolutam, perfectamque tradiderit. Sed tamen scrupulus eis injectus in Conicis sectionibus adhibendis exinde ipsis obortus est, quòd proprietates Conicarum sectionum non quidem viderentur ipsis nec certæ, nec evidentes, quemadmodum illæ, quæ Circulo conveniunt; sed quia descriptio Conicarum sectionum non tam facile posset haberi, sicuti Circuli ipsius descriptio, quæ solius circini ductu perquamfacile obtinetur.

Nam, quemadmodum ex Pappo Operum Veterum Geometrarum egregio collectore deducitur, primus Veterum conatus in rebus Geometricis fuit illorum problematum resolutio, quæ *plana* ab eis dicta, Circulo, & recta linea efficiuntur; sed deinceps eorum problematum solvendorum provinciam aggressi, quæ *solidorum* nomen apud ipsosmet sortita erant, cum datum angulum rectilineum trifariam secare primo voluissent, omnino hæsitantes substiterunt. Nam, cum nondum ipsis cognitæ essent Conicæ sectiones, problema illud natura solidum per plana inquirentes nullo pacto inveniebant. Posthæc vero, detectis Coni sectionibus, quando illis uti cœperunt in dictorum soli-

solidorum problematum resolutione, non modo angulum tripartitò secarunt, verùm etiam problematis Deliaci solutionem prospero successu adsequuti sunt, in quo cubus cubi duplus quærebatur. Ejusmodi tamen solutiones deinceps neglexerunt; non quòd eas non probe deprehenderint; sed quia non tam facile videbantur ipsis Coni sectiones in plano posse designari.

Pappus enim caussam quærens in Scholio Propositionis xxx. lib. iv. versus finem, cur antiqui Geometræ angulum rectilineum in tres partes æquales secare volentes in maximas difficultates inciderint; inde repetit illam; quòd problematum Geometricorum tria sint genera; alia plana, alia solida, alia linearia supra à nobis definita. *Cum hujusmodi sit* (inquit) *problematum differentia; antiqui Geometræ problema jam dictum in angulo, quod* (problema) *natura solidum est, per plana inquirentes, invenire non potuerunt; nondum enim ipsis cognitæ erant Coni sectiones, & ob eam caussam hæsitarunt; postea vero angulum tripartito diviserunt ex Conicis.* Hæc Pappus de anguli trisectione. Quòd verò ipsi Veteres Coni sectiones dein neglexerint ob difficultatem designationis illarum effectæ in plano, disertè idem Scriptor indicat in Scholio propositionis iv. lib. iii. ubi, traditis iisdem problematum differentiis, hæc subnectit: *Cum igitur tales sint problematum differentiæ, antiqui Geometræ problema de duabus mediis proportionalibus, quod natura solidum esset, Geometrica ratione innisi* (idest constructione obtenta per Curvam in plano descriptam) *construere non potuerunt; quoniam neque Coni sectiones facile est in plano designare.* Item eadem habet in propositione xi. libri 8. *Problema, quod Deliacum appellatur, & natura solidum sit, fieri non potest, ut Geometricis rationibus innisi construamus; quoniam neque Coni sectiones facile est in Plano describere.*

Hæc

Hæc Veterum sententia ad tempora usque Cartesii multùm apud Geometras invaluit; & fere omnes id dumtaxat problema Geometrice fieri dicebant, quod per rectam lineam, & Circuli circumferentiam solvi potuisset, hac moti ratione; quòd recta linea citra laborem simplicissimâ normâ ducatur; & Circuli circumferentia solo circini ductu perquam facile describatur. Sed deinceps cum noverint Geometræ, amplissimæ Geometriæ scientiæ fines hoc pacto præscribi multò angustiùs; severamque illam legem absque ullo fundamento Veteres Geometras promulgasse; ut Geometriam simul promoverent ad suam, qua par est, amplitudinem adductam, non modo Coni sectiones, sed alias quoque Curvas sectionibus Conicis compositiores in Geometriam invexerunt.

Quod enim Coni sectiones, aliæque Curvæ non tam facile in plano designentur, etiam si illud concedamus; nihil tamen obstat, quo minus eæ in Geometriam recipiantur. Siquidem, cum Geometria sit Scientia, quæ Corporum mensuras docet, non quidem instrumentis Mechanicis, sed ratione, & contemplatione; utique Geometriæ munus non erit lineas, & figuras describere, sed tantùm modum tradere, quo eæ concipi possint descriptæ; ipsasque jam descriptas mente contemplari. Unde, quotiescumque in Geometria construendum problema aliquod proponitur, non sic illud usurpandum, quasi aliquo ex Mechanicis instrumentis, sive id Circinus sit, sive quidpiam aliud, uti debeamus; sed tantùm, ut rationem exponamus, qua concipiendum sit problema illud fieri posse. Nam ceteroquin si Geometricæ constructiones ex Mechanicis instrumentis penderent, nulla foret Geometriæ certitudo; cum nulla dari possint instrumenta adeo accurate fabrefacta, ut nullis erroribus

sint

sint obnoxia; sed tantùm ea ratione concipi facta possunt. Quibus omnibus addi potest, falsum esse, Coni sectiones non tam facile posse in plano designari; cum, quemadmodum Circulus circino, ita etiam Coni sectiones aliis instrumentis Circino non longe magis compositis, & ad praxim satis expeditis possint probè describi.

His positis: penes recentiores Geometras voce *Geometrici* omne id dicitur, quod omnino perfectum, & exactum est, sive Circulo, sive qualibet alia ratione fiat; modo tamen id tali ratione fieri posse mente concipiatur, & ad operationem Mechanicam animus nullo pacto intentatur. Nam non alio pacto Geometricum a Mechanico distinguitur; nisi ut Geometricum vocetur, quod exactum est, & accuratum; Mechanicum vero, quod est minus exactum, & accuratum, at instrumentis, & artibus Mechanicis absolutum; subinde ut problema aliquod Geometricè fieri dicatur, quod exacte fit, & accurate; sive cum ejus, quod quæritur, exactus valor reperitur; Mechanice vero, cum id fit minus accurate, sive cum Quæsiti valor non nisi per approximationem elicitur ope instrumentorum.

Hac ratione Cartesius initio lib. primi suæ Geom. animadvertit, omnia problemata, quæ in Geometria considerantur, facile posse ad hujusmodi terminos reduci, ut ad illorum constructionem tantùm opus sit, rectarum quarumdem linearum longitudinem cognoscere. Exemplum esto: super data recta linea A B constituendum proponatur triangulum omnia latera æqualia habens: si illud jam factum supponamus, ut sit A C B, & ex ang. C demittamus perpendicularem C D; quia hæc perpendicularis bifariam dividit in puncto D datam rectam A B, palam est eô rem adduci, ut cognoscatur valor hujus perpendicularis

Fig. 5.

cularis C D. Eo enim cognito, facilis quidem est problematis constructio. Quoniã satis erit datã rectam lineam A B dividere bifariam in puncto D, & ex puncto sectionis erigere perpendicularem D C longitudinis inventæ. Nam si deinceps jungantur rectæ C B, C A, erit A C B triang. quæsitum; & propositum problema ad valorem alicujus rectæ lineæ cognoscendum solùm est revocatum. Ergo hac consideratione problemata Geometrica a Mechanicis distinguere facile erit, & pronum. Nam, cum unumquodque problema eô quidem reducetur, ut ad ipsius constructionem tantùm opus sit cognoscere valorem alicujus rectæ lineæ; utique illud problema dicetur Geometricum, si hujus rectæ lineæ valor exacte possit reperiri; & vicissim problema erit, diceturque Mechanicum, cum valor ejusdem rectæ lineæ non alia quidem ratione detegi poterit, quam per approximationem, sive statuendo limites, quibus valor ille continetur.

Sed hic notetur velim, quòd pro exacto alicujus rectæ lineæ valore non modo hic intellig debeat, qui numeris exprimi potest, ac proinde inveniri per proportionem rationalem, quam habet cum alia recta linea similiter numeris expressa; cum id ferme idem sit, ac problema Geometricum vocare, quod alii problema Arithmeticum dixere, cujusmodi sunt omnia problemata, quæ in libris Diophanti Alexandrini per solos numeros ab eodem subtiliter resoluta continentur; sed intelligendus est exacte cognitus valor alicujus rectæ lineæ, semperac scitur relatio, quam habet cum alia recta linea, etiamsi isthæc relatio numeris exprimi nequeat.

Quô circa ut omnis æquivocatio tollatur, dicere possemus problemata omnia ad duas præcipuas species revocari; & alia esse problemata Exacta, in quibus

 scilicet

scilicet exacte reperiri possunt valores linearum rectarum, quæ problemata illa determinant: alia problemata Approximationis, in quibus nempe valores earum linearum nonnisi per approximationem possunt comperiri. Sed problemata prioris speciei alia insuper esse simplicia, sive Arithmetica; cum valores dictarum linearum utpote rationales numeris exprimi possunt; alia composita, sive Geometrica; cum ii valores nullis numeris designari queunt. Sed ne in designandis duabus præcipuis problematum speciebus a vocibus *Geometrici*, & *Mechanici* recedamus, palam est, non aliam esse differentiam inter problema Geometricum, & problema Mechanicum; nisi quòd in illo valor Lineæ Determinatricis exacte semper inveniatur; cum tamen in problemate Mechanico idem ille valor nonnisi per approximationem possit inveniri.

Ex hac problematum distinctione in Geometrica, & Mechanica orta est distinctio Curvarum Geometricarum, & Mechanicarum. Cum enim ex dictis Capite superiori lineæ Curvæ aliud non sint, quàm loca, sive series punctorum, quæ alicui problemati indeterminato satisfacere possunt; utique si problema illud Geometricum erit, dicetur & ipsa Curva Geometrica; secus vero si problema Mechanicum erit, quia Curva, quæ ad ipsam refertur, per approximationem invenitur, Mechanica itidem ea nominabitur. Quare Curvæ Geometricæ poterunt semper Geometrica, & constanti ratione describi; non ita quidem Curvæ Mechanicæ.

Hanc distinctionem primus omnium consideravit Cartesius, nam omnes alii Geometræ, qui ipsum præcessere, has duas Curvarum species valde commiscebant. Atque eò quia Curvæ Geometricæ possint semper Geometrica, & constanti ratione describi, secus vero Curvæ Mechanicæ, solas Curvas Geometricas

tricas in Geometriam admittendas esse putavit, nil vero Mechanicas, ea quidem ratione, quòd & si Geometræ munus non sit, lineas, & figuras describere, & in plano designare, quippe qui illas tantũ descriptas supponit; attamen maxime ad Geometram pertineat, rationem tradere, qua linearum, & figurarum ortus, sive descriptio Geometricè, & constanter intelligi possit.

Sed alii post Cartesium non obscuri nominis Geometræ tametsi noverint Curvas, quas Cartesius vocavit Mechanicas, valde differre a Geometricis, dictis rationibus; nihilominus minime passi sunt, Mechanicas Curvas ab albo Geometriæ expungi. Nam, quòd Geometrica, & constanti ratione describi minime possint, id in causa esse nequit, ut a Geometria non considerentur; cum ad id satis sit, ut si mente supponantur descriptæ, habeant, haud secus ac Curvæ Geometricæ, certas, & constantes proprietates, quæ ad omnia ipsarum Curvarum puncta pertineant: & proinde Curvas illas non quidem Mechanicas, sed Trascendentes, sive etiam Geometricè Irrationales dicendas potiùs esse decernunt.

Docent enim, triplex esse genus quantitatum; earum, quæ numeris perinde, ac lineis rectis exprimi possunt; illarum, quæ nullis quidem numeris, sed per solas lineas rectas designantur; & tertium denique genus earum, quæ nullis quidem numeris, sed nec etiam rectis lineis possunt definiri. Nam si quæratur ex. gr. radix quadrata numeri 9. ea non modo exprimi potest per longitudinem alicujus lineæ rectæ, verum etiam per numerum 3. sed si quæratur quadrata radix numeri 8. ea nullo pacto designari potest numero integro, sive fracto; sed tantum per longitutinem lineæ rectæ; quærendo scilicet ope Circuli mediam proportionalem inter 1. & 8. vel etiam inter

inter 2. & 4. Et deniq. si quæratur valor circumferentiæ Circuli, sive si quæratur proportio quam habet illa ad suam diametrum, non modo hæc proportio nullis numeris, sed ne per rectas lineas quidem potest definiri.

Hinc primo, cum Geometria sit Scientia, quæ circa quantitatem versatur, pro triplici illa quantitatis specie triplex distinguunt problematum Geometricorum genus; unum siquidem statuunt eorum problematum, in quibus quantitates quæsitæ numeris, perinde ac lineis rectis, designantur, qualia sunt, quæ vulgo simplicia, sive Arithmetica dicuntur: secundum ea problemata continet, in quibus quantitates quæsitæ non quidem numeris, sed per solas lineas rectas exprimuntur; atque ejusmodi sunt, quæ paulo ante Geometrica nominavimus. Relinquitur tertium genus, quod ea problemata complectitur, in quibus quantitates quæsitæ neque numeris, neque lineis rectis possunt designari; cujus generis sunt problemata, quæ Mechanica nuncupavimus.

Hinc 2. nulla etiam facta inter hæc problemata distinctione, sed omnibus perinde consideratis, ac si quantitates in iis quæsitæ rectis lineis possent definiri, triplex statuitur Linearum genus; nam eo modo, quem superiori capite docuimus, problematis indeterminate consideratis, erit quidem primum genus linearum, ad quas pertingunt rectæ lineæ, quæ in ordinatas series dispositæ designant quantitates in problematis primi generis quæsitas. Secundum genus erit linearum, quæ sunt limites, quibus series problematum secundi generis continentur; & tertium denique genus lineas illas complectetur, quæ sunt limites serierum problematum tertii generis. Quare, quemadmodum in primo genere solæ rectæ lineæ continentur, & series problematum primi generis sunt semper in triangulis; ita in secundo Curvæ illæ lineæ erunt, quas Geometricas Cartesius vocavit; atque ita in tertio lineæ Curvæ continebuntur, quas idem Cartesius Mechanicas dicendas esse decrevit.

Hinc tertio; quemadmodum quantitates, quæ nullis numeris, sed per solas lineas rectas designantur, dicuntur Arithmeticæ irrationales, ad differentiam earum quantitatum, quæ, cum numeris perinde, ac lineis rectis exprimantur, Arithmeticæ rationales dicuntur; ita etiam quantitates illas, quæ non modo nullis numeris, sed nec etiam ullis rectis lineis possunt definiri, quantitates Geometricè irrationales nominarunt Recentiores; & distinxerunt ab iis, quæ cum solis lineis rectis designentur, dici possunt Geometricè rationales: qua ratione Curvas illas quas Cartesius Mechanicas nuncupavit, Geometricæ irrationales ipsi dixerunt; & quæ a Cartesio Geometricæ dicebantur, Curvas etiam Geometricè rationales nuncuparunt. Atque hac etiam de causa factum est, ut easdem illas Curvas Trascendentes nominaverint; nam, quemadmodum primum linearum genus sub secundo etiam continetur; cum, quod per solam lineam rectam efficitur, fieri quoque possit per Circuli circumferentiã, aut per quamvis aliam Curvam lineam Geometricè rationalem; ita etiam, quia quod primo, aut secundo genere linearum obtinetur, potest tanto magis per lineas tertii generis obtineri, ipsum tertium genus linearum sub se comprehendet tam genus primum, quàm genus secundum: & proinde, cum per utrumque transcendat, non abs re ipsæ lineæ tertii generis, quas Mechanicas Cartesius nominavit, lineæ Transcendentes poterunt nominari.

CAPUT III.

De Natura Sectionum Conicarum Earumdemque in infinitum Processu.

JAm illuc, quò animus properabat, & in quo reposita est hujus tractatus doctrina, pedem immittimus. Huc usque naturam linearum Curvarum generatim contemplati sumus; nunc propriùs ad rem accedentes ipsas Curvas lineas hactenus a Geometris consideratas enumerandas suscipimus: & propriam lineæ Curvæ cujusque naturam singillatim expositione prosequemur. Primę linęę Curvę,quę Veteribus post Circulum innotuerunt, sunt Conicæ sectiones, ut jam sub initium diximus: quare harum naturam primò contuebimur; quas cum tres esse constet, Parabolam, Ellipsim, Hyperbolem, sitque Parabola aliis duabus longe simplicior, ab ea initium ducemus.

Fig. 6. Est Parabola Curva linea, in qua quadrata ordinatarum eamdem inter se habent rationem, ac abscissæ correspondentes: ut si rectæ lineæ A B ad quemvis datum ang. ordinatim adplicentur plures rectæ lineæ M N sibi invicem parallelæ, sed talis quidem naturæ, & longitudinis, ut ipsarum M N quadrata habeant inter se eamdem rationem, ac abscissæ A M iis ordinatis correspondentes, linea Curva A N N, quæ per extremitates earum ordinatarum transibit, *Parabola* dicetur.

Unde

Unde, si ex vertice ejus A ducta recta A C ipsis M N parallela talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ D E æquale sit rectangulo C A D, quod fit ex ipsa recta AC in abscissam correspondentem AB; erit quadratum cujusvis alterius ordinatæ MN æquale rectangulo C A M, quod fit ex A C in abscissam correspondentem A M. Nam, per Parabolæ naturam, ut D E quadratum ad M N quadratum, ita abcissa A D ad abscissam A M; sed, sumpta communi altitudine A C, abscissa A D est ad abscissam A M, ut rectangulum C A D, ad rectangulum C A M; quare erit ex æqua ratione, ut DE quadratum ad M N quadratum, ita rectangulum C A D, ad rectang. C A M: & proinde, quia rectangulo C A D æquale supponitur D E quadratum, erit etiam rectangulo C A M æquale M N quadratum.

Ellipsis est Curva linea, in qua ordinatarum quadrata eamdem servant rationem, quam habent rectangula comprehensa sub portionibus ex eadem rectâ lineâ per ordinatas illas abscissis. Ut si eidem rectæ lineæ A B ad quemvis datum ang. ordinatim adplicentur plures rectæ lineæ M N sibi invicem parallelæ in quovis angulo, sed ejus tamen longitudinis, ut ipsarum M N quadrata sint veluti rectangula A M B, quæ fiunt a correspondentibus portionibus A M, M B, ex eadem recta linea A B per ordinatas dictas abscissis, linea Curva A N B connectens harum ordinatarum extremitates *Ellipsis* nominabitur. Unde si ex vertice A ducatur recta A C, quæ ipsis M N parallela talis sit longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ D E sit ad suum rectangulum A D B, veluti ducta recta A C ad ipsam A B erit quadratum cujusvis alterius ordinatæ M N ad suum rectang. A M B, etiam uti A C, ad A B. Nam cum per Ellipsis naturam quadratum D E sit ad M N Fig. 7.

qua-

quadratum, uti rectangulum A D B ad rectang. A M B, erit, permutando, ut D E quadratum ad rectang. A D B, ita M N quadratum ad rectang. AMB; unde quia ex hypothesi D E quadratum est ad rect ng. A D B, uti A C ad AB; erit ex æqua ratione etiam ut M N quadratum ad rectang. A M B, ita A C, ad A B.

Fig. 8. Ex quo patet quadratum cujuslibet ordinatæ M N minus esse rectang. C A M quod fit ex recta A C in abscissam correspondentem A M alio rectang. simili, similiterque posito ei, quod fit ex A C in A B. Etenim juncta B C, ductaque ex puncto O, in qua ipsa M N huic occurrit, recta O P ipsi A B parallela; propter similitudinem triangulorum A C B, M O B, erit uti A C, ad A B, ita M O, ad M B; sed, per antecedentem Ellipsis proprietatem, AC est ad A B, ut M N quadratum ad rectang. A M B; sumptaque communi altitudine AM, est M O ad MB, ut rectangulum A M O ad rectangulum A M B; quare erit ex æqua ratione, ut M N quadratum ad rectangulum A M B, ita rectangulum A M O ad idem rectangulum A M B; & proinde M N quadratum æquale erit rectangulo A M O: jam vero rectangulum A M O minus est rectangulo C A M rectangulo alio C P O quod est simile, & similiter positum rectangulo C A B, cum sint circa eamdem diagonalem B C. Ergo M N quadratum minus erit rectangulo C A M, alio rectangulo simili, similiterque posito ei, quod fit ex A C in A B. Q. E. D.

Hyperbola est linea Curva, in qua ordinatarum quadrata eam inter se servant proportionem, quam habent rectangula, quæ fiunt ex portionibus sumptis ex utroque alicujus rectæ lineæ termino, & correspondentibus ordinatis ad ipsam illam rectam lineam

Fig. 9. versus unum terminum productam adplicatis. Si A B sit

sit aliqua recta linea terminata, & ad eam versus terminum unum A productam adplicentur in quolibet dato angulo plures rectæ lineæ M N parallelæ; sed ita tamen ut ipsarum M N quadrata in ea inter se sint ratione, quam habent rectangula A M B, quæ fiunt ex correspondentibus portionibus A M, B M sumptis ex utroque termino rectæ lineæ A B; linea Curva A N E, quæ per earum ordinatarum extremitates transibit, *Hyperbola* dicetur.

Si ex vertice A ducatur recta A C perallela ordinatis M N ejus longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ D E sit ad suum rectangulum A D B, ut A C ad A B; erit etiam quadratum cujusvis alterius ordinatæ M N ad rectangulum ipsi correspondens A M B, similiter ut A C ad A B. Nam, cum per hyperbolæ naturam D E quadratum sit ad M N quadratum, ut rectangulum A D B ad rectangulum AMB, erit, permutando, ut N E quadratum, ad rectangulum A D B, ita M N quadratum ad rectangulum AMB. Unde quia, ex hypothesi, DE quadratum est ad rectangulum A N B ut AC ad A B; erit, ex æqua ratione, uti M N quadratum ad rectangulum A M B, ita A C ad A B.

Ex quo patet quadratum cujuslibet ordinate MN majus esse rectangulo CAM, quod fit ex recta AC in abscissam correspondentem A M rectangulo alio simili, similiterque posito ei, quod fit ex A C in A B. Fig. 10.
Etenim juncta BC, productaque ipsa M N, donec cum ea protracta conveniat in puncto O; quia similia sunt Triangula A C B, M O B, erit ut A C ad A B, ita M O ad M B. Sed per antecedentem hyperbolæ proprietatem, AC est ad A B, ut M N quadratum ad rectangulum A M B; & sumpta communi altitudine A M, est M O ad M B, ut rectangulum A M O ad rectangulum A M B; quare erit ex

ex æqua ratione, ut MN quadratum ad rectangulum AMB, ita rectangulum AMO ad idem rectangulum AMB; & proinde MN quadratum æquale erit rectangulo AMO. Jam vero demissa CP ipsi AM parallela, rectangulum AMO majus est rectangulo CAM, alio rectangulo CPO, quod est simile, similiterque positum rectangulo BAC, cum sint circa eamdem Diagonalem BO; igitur MN quadratum majus etiam erit rectangulo CAM rectangulo alio simili, similiterque posito ei, quod fit ex AC in AB.

Ex his omnibus facile colligitur quænam sit harum omnium Curvarum differentia. In Parabola quadratum cujusvis ordinatæ æquale est rectangulo ex abscissa in rectam lineam constantem, quæ *Parameter*, sive *Latus rectum* nominatur. In Ellipsi idem quadratum minus est, in hyperbola majus rectangulo sub abscissa, & latere recto comprehenso, alio rectangulo simili, similiterque posito ei, quod fit ex eodem latere recto in aliam rectam lineam, quæ *Lateris transversi* nomine appellatur. Inde ejusmodi Curvæ nomine Parabolæ, Ellipsis, & Hyperbolæ appellantur; quandoquidem Parabola comparationem, sive æqualitatem, Ellipsis defectum, & Hyperbola excessum Græce notant.

Sed ad harum Curvarum similitudinem alias similes Curvas in infinitum promotas recentiores Geometræ excogitarunt. Has similiter infinitas Parabolas, infinitas Ellipses, & infinitas hyperbolas nominarunt. Et, ut ab infinitis Parabolis ordiamur, quemadmodum parabolæ Conicæ Veterum ea est præcipua proprietas, ut quadratum cujusque ordinatæ adæquet rectangulum sub latere recto, & correspondente abscissa comprehensū; ita alias Curvas in infinitum effinxerunt, quarum generaliter ea sit proprietas, ut non quadratum

tum dumtaxat, sed quælibet cujusque ordinatæ potestas adæquet homogeneum productum, quod fit ex alia minori potestate lateris recti, in potestatem reliquam abscissæ correspondentis. Et ex variis potestatibus, ad quas ascendere potest ordinata, diverse Curvas illas nominarunt. Siquidem dicuntur Parabolæ Quadraticæ, sive primi generis, si ordinatæ potestas sit quadratum; Cubicæ, sive secundi generis, si ordinata ad cubum ascendat, atque ita in infinitum.

Cujuscumque vero generis Parabolæ, si quadraticæ, sive eæ, quæ primi generis sunt, utpote unius dumtaxat speciei, excipiantur; in plures alias species distribui possunt; idque pro variis modis, quibus parameter, sive latus rectum componi potest cum abscissa, ut productum obtineatur homogeneum potestati, ad quam ascendit ordinata. Hoc pacto: Parabolæ Cubicæ, sive secundi generis duplicis esse possunt speciei. Etenim vel in iis Cubus cujuslibet ordinatæ adæquat Solidum, quod fit ex quadrato lateris recti in abscissam correspondentem, & tales Parabolæ primam speciem constituent; vel ejus sunt naturæ, ut Cubus cujusque ordinatæ æqualis sit Solido, quod fit ex latere recto in quadratum abscissæ correspondentis; & hoc quidem casu ejusmodi Parabolæ speciem alteram component.

Eadem ratione duplicis quoque speciei esse possunt Parabolæ tertii generis quæ alio vocabulo Quadrato - quadraticæ etiam dicuntur. Siquidem vel quadrato - quadratum unius cujusque ordinatæ æquale est Plano - plano, quod fit ex Cubo lateris recti in abscissam correspondentem; & cum hoc contingit, Parabolæ primam speciem earum, que tertii sunt generis constituent: vel eam habent naturam, ut quadrato - quadratum cujuslibet ordinatæ æquale sit plano - plano, quod sub latere recto, & Cubo abscissæ correspondentis

respondentis continetur; & tales quidem Parabolæ speciem alteram efformabunt. Sed notandum est, quod tamen si in hujusmodi tertii generis parabolis ponit quoque quadrato - quadratum unius cujusque ordinatæ per æquationem comparari cum plano - plano, quod sub quadrato lateris recti, & quadrato abscissæ correspondentis comprehenditur; attamen non hinc parabolæ, quæ hac natura pollent, speciem alteram parabolarum tertii generis constituent; quandoquidem reipsa ne tertii generis quidem sunt; cum, extracta ex utraque parte radice quadratâ, ad parabolas primi generis deprimantur. Id quod etiam in similibus casibus est observandum.

Ita. Si in hisce Parabolis latus rectum sit 2. & ordinata dicatur a abscissa vero sit 3. jam quadratum a. est aa seu a^2 & quadrato - quadratum ipsiusmet a, sive quadratum a^2 est a^4: est vero 4 quadratum 2 lateris recti; & 9 est quadratum 3 abscissæ; quare plano - planum ex quadrato lateris recti in quadratum abscissæ, erit 36. Ergo hæc Parabola eam habebit proprietatem, ut sit a^4 æquale 36. Verùm radix quadrata a^4 est a^2; & radix quadrata 36 est 6; ergo fiet proprietas, ut sit a^2 æquale 6. seu $a^2 = 2 \times 3$; idest Parabola erit, cujus ordinatæ quadratum est æquale rectang. ex latere recto 2 in abscissam correspondentem 3. Sed Parabola, cujus ordinatæ quadratum est æquale rectangulo ex latere recto in abscissam correspondentem, est Parabola prima communis Apolloniana. Quare patet propositum.

Ex

Ex infinitis Parabolis ad infinitas Ellipses transeuntes dicimus, quod, quemadmodum Conicæ Veterum Ellipsis ea est natura, ut quadratum cujusque ordinatæ deficiat a rectangulo sub latere recto, & correspondente abscissa comprehenso rectang. alio simili, similiterque posito ei, quod fit ex eodem recto latere in latus transversum; ita recentiores Geometræ Ellipses alias in infinitum excogitarunt, quarum ea est natura, ut non quadratum tantummodo, sed quævis cujusque ordinatæ potestas deficiat ab homogeneo producto, quod fit ex alia minori potestate lateris recti in potestatem reliquam abscissæ correspondentis, defectu simili, similiterque posito alteri homogeneo producto, quod fit ex eadem lateris recti potestate in potestatem reliquam lateris transversi. Et, perinde ac in parabolis dictum est, diversè Ellipses hasce nominarunt ex variis potestatibus, ad quas ascendere potest ordinata. Dicuntur enim Ellipses quadraticæ, sive primi generis, si ordinatæ potestas sit quadratum, Cubicæ, sive secundi generis, si ordinatæ potestas ad Cubum ascendat, atque ita deinceps.

Hinc etiam unumquodque genus Ellipsium, dummodo quadraticæ, sive eæ, quæ primi generis sunt, excipiantur, in varias alias species dividi potest; idque pro diversis rationibus, quibus latus rectum cum abscissa complicari potest; ut productum habeatur homogeneum potestati, ad quam ascendit ordinata. Qua ratione Ellipses Cubicæ, seu secundi generis duplicis esse possunt speciei, vel si Cubus cujusque ordinatæ deficit a solido, quod fit ex quadrato lateris recti in abscissam correspondentem, defectu simili, similiterque posito ei solido, quod fit ex eodem lateris recti quadrato in latus transversum; & hæ Ellipses primam speciem constituent; vel si Cubus cujuscumque ordinatæ deficiat à solido, quod fit ex latetere recto in quadratum lateris transversi; quo casu ejusmodi Ellipses speciem alteram constituent.

Et duplicis quoque speciei esse possunt Ellipses tertii generis alio vocabulo Quadrato - quadraticæ etiam dictæ; nam, vel quadrato - quadratum unius cujusque ordinatæ deficit a plano - plano quòd fit ex Cubo lateris recti in abscissam correspondentem defectu simili, similiterque posito ei plano - plano, quod fit ex Cubo lateris recti in latus transversum; & tum prima species fiet Ellipsium tertii generis; si vero quadrato - quadratum cujuslibet ordinatæ deficit à plano - plano, quod sub latere recto fit, & Cubo abscissæ correspondentis, defectu simili, similiterque posito ei plano - plano, quod ex eodem latere recto in Cubum lateris transversi; & hujusmodi Ellipses speciem alteram tertii generis conficient. Non sunt vero enumerandæ in hoc tertio genere Ellipses, in quo quadrato - quadratum ordinatæ fiat æquale plano - plano, quod sub quadratis lateris recti, & abscissæ correspondentis continetur; dempto defectu simili, similiterque posito ei plano - plano, quod fit ex quadrato lateris recti, in quadratum lateris transversi. Nam, haud secus ac in Parabolis, hujusmodi Ellipses, extracta radice quadratâ á quantitatibus unâ comparatis, seu mutuo æquatis ad Ellipses primi generis deprimuntur.

Sed hic calculo Algebrico ad naturam harum Curvarum ultra productarum, & ad quasdam earum proprietates satius exponendas accomodato utendum necessariò nobis est, ut rectè eæ intelligantur; quod neque mirum, ac novum, neque importunum debet videri; tum quia, hoc duce Calculo, Geometria universa, & maximè hæc disciplina Curvarum mirificè provecta est, uti benè notum Geometris; quare aliquo jure ipsum huncce calculum Geometria ejusmodi Curvarum sibi deposcere videtur; cùm etiam quoniam ope hujus calculi multa in nova Geometria, immo fere omnia, & potissimum hæc, quæ pertractamus, longè expeditiùs, ac clariùs & exponuntur, & intelliguntur.

Igitur positis litteris m & n pro indiciis potestatum, quas habent quantitates utriusque membri Algebricæ æquationis; & dicta x abscissâ nostræ Ellipsis [*Fig.* 7.] dicta vero y ordinatâ correspondente; atque latere recto nuncupato a, & latere transverso nuncupato b; efformo pro omnibus Ellipsibus cujusvis generis, & speciei generalissimam æquationem

$$y^{m+n} = \overline{a - \frac{a}{b}x}^{\,m} \times x^{n}$$

Ex hac æquatione clarissime cognoscitur primò, in Ellipsibus his omnibus infinite productis, reipsa latus rectum ita complicari cum abscissa, ut productum habeatur semper homogeneum potestati ordinatæ: quales Curvæ esse debent; & ita efformatæ esse debent etiam æquationes designantes illas. Nam hoc modo collocata sunt potestatum indicia m, & n, ut id semper necessariò fiat. Secundò cognoscitur, ordinatæ ipsiusmet potestatem deficere semper in Ellipsibus his omnibus ab homogeneo producto ex alia minori potestate lateris recti in potestatem reliquam abscissæ correspondentis, defectu simili, similiterque posito alteri homogeneo producto ex eadem lateris recti potestate in potestatem reliquam lateris transversi. Sicuti id est in Ellipsi communi Apolloniana; & quæ nota est prima, ac præcipua Curvarum linearum Ellipticarum. Nam æquatio est generalis; quare si in ea id ostendetur, factum idem erit pro omnibus æquationibus Ellipsium omnium, seu pro cunctis Ellipsibus.

bus. Igitur oſtendam, productum $\overline{a - \frac{ax}{b}}^{m} \times x^{n}$ eſſe id ipſum productum; quod profecto eſt, quod quæritur. Jam $a - \frac{ax}{b}$ eſt quarta proportionalis ad latus tranſverſum b, ad latus rectum a, & ad differentiam ipſius lateris tranſverſi, & abſciſſæ x, ideſt ad $b - x$.

Fig. 11. Statuatur A B latus tranſverſum; A C latus rectum; & A M abſciſſa quævis; juncta B C, & ducta MO parallela AC, erit MO valor ipſius $a - \frac{ax}{b}$. Ob ſimilitudinem Triangulorum B A C, B M O. Jam verò omnes quantitates habentes m pro indicio poteſtatis ſunt homogeneæ; & omnes, quæ habent n pro eodem indicio ſunt quoque homogeneæ. Ergo, quia productum ex MO^{m} in AM^{n} deficit à producto, quod fit ex AC^{m} in AM^{n} defectu ſimili, ſimiliterque poſito ei producto, quod ex AC^{m} in AB^{n}; cum latera producentia ſint juxta diagonalem B C; eſt vero A M (x) abſciſſa, & A C (a) latus rectum; atque A B [b] latus tranſverſum; & in hoc ipſo producto deficiente, latus rectum habet minorem poteſtatem, quàm ordinata; habet enim m; ordinata verò $m + n$; abſciſſa autem habet reliquam; alterumque homogeneum productum conſtituens defectum ſimilem, & ſimiliter poſitum conſtat ex eadem lateris recti poteſtate ducta in poteſtatem reliquam lateris tranſverſi, patet propoſitum.

Adplicetur modo æquatio generalis ad deſignandas Ellipſes quaslibet: ſit $m = 1$; & $n = 1$ erit Ellipſis communis; $y^{2} = ax - \frac{axx}{b}$. Sit $m = 2$; & $= n\ 1$; erit Ellipſis Cubica prioris ſpeciei $y^{3} = aax - \frac{2aax^{2}}{b} + \frac{aax^{3}}{b^{2}}$. Sit $m = 1$, & $n = 2$; erit Ellipſis Cubica alterius ſpeciei $y^{3} = ax^{2} - \frac{ax^{3}}{b}$. Sit $m = 3$. & $n = 1$; erit Ellipſis quadrato-quadratica prioris ſpeciei; $y^{4} = aaax - 3\frac{aaaxx}{b} + 3\frac{aaax^{3}}{bb} - \frac{aaax^{4}}{b^{3}}$. Sit $m = 1$, & $n = 3$; prodibit Ellipſis quadrato-quadratica alterius ſpeciei $y^{4} = ax^{3} - \frac{ax^{4}}{b}$

Sit modo $m = 2$. & $n = 2$; erit Ellipſis quadrato-quadratica $y^{4} = \overline{a^{2} - \frac{2aax}{b} + \frac{aax^{2}}{b^{2}}} \times x^{2}$. Sed hac æquatio reducitur ad $y^{2} = \overline{a - \frac{ax}{b}} \times x$; quæ Apolloniana eſt Ellipſis. Ergo patet hoc genus Ellipſium, quod modò ſupra dicebamus in tertio genere non eſſe enumerandum, revera in illo nequaquam poſſe recenſeri.

Et denique, ut ad infinitas hyperbolas gradum faciamus; quemadmodum Conicæ Veterum hyperbolæ ea eſt proprietas, ut quadratum cujuslibet ordinatæ excedat rectangulum ex latere recto in abſciſſam correſpondentem rectangulo alio ſimili, ſimiliterterque posito ei, quod fit ex eodem latere recto in latus transversum; ita recentiores Geometræ hyperbolas alias infinite considerarunt; in quibus non quadratum dumtaxat, sed quævis cujusque ordinatæ potestas excedat homogeneum productum, quod fit ex alia minori potestate lateris recti in potestatem reliquam abscissæ correspondentis excessu simili, similiterque posito alteri producto homogeneo, quod fit ex eadem recti lateris potestate in potestatem reliquam lateris transversi. Et ex diversis potestatibus, ad quas ascendere potest Ordinata, diverso modo hyperbolas hasce Recentiores nominarunt; etenim dicuntur hyperbolæ quadraticæ, seu primi generis; si ordinatæ potestas sit quadratum; Cubicæ, sive secundi generis, si ordinata ad Cubum ascendat, atque ita deinceps.

Unumquodque verò genus hyperbolarum, veluti in Parabolis, & Ellipsibus; modo quadraticæ, sive hyperbolæ primi generis excipiantur, utpote unius dumtaxat speciei; in varias alias species dividi potest pro diversis modis, quibus latus rectum cum abscissa complicari potest, ut productum habeatur homogeneum potestati, ad quam ascendit ordinata. Quare hyperbolæ Cubicæ, sive secundi generis duplicis esse possunt speciei. Etenim vel in iis Cubus cujuslibet ordinatæ excedit solidum, quod fit ex quadrato lateris recti in abscissam correspondentem, excessu simili, similiterque posito ei, quod fit ex eodem lateris recti quadrato in latus transversum; & tales hyperbolæ primam speciem constituunt; vel ejus sunt naturæ, ut Cubus cujusque ordinatæ excedat solidum, quod fit ex latere recto in quadratum abscissæ correspondentis excessu simili, similiterque posito ei, quod fit ex eodem latere recto in quadratum lateris transversi; & hoc quidem casu ejusmodi hyperbolæ speciem alteram component.

Eadem

Eadem ratione duplicis quoque speciei esse possunt hyperbolæ tertii generis, quæ alio vocabulo quadrato-quadraticæ etiam dicuntur. Siquidem, vel quadrato-quadratum unius cujusque ordinatæ excedit plano-planum, quod fit ex Cubo lateris recti in abscissam correspondentem excessu simili, similiterque posito ei, quod fit ex Cubo ejusdem lateris recti in latus transversum; & cum hoc contingit, hyperbolæ primam speciem earum, quæ tertii sunt generis, constituunt; vel eam ipsæ habent naturam, ut quadrato-quadratum cujusquæ ordinatæ excedat plano-planum, quod fit ex latere recto in Cubum abscissæ correspondentis excessu simili, similiterque posito ei, quod sub eodem latere recto, & Cubo lateris transversi continetur; & tales quidem hyperbolæ speciem alteram efformabunt. Etenim hic quoque, perinde ac in parabolis, & Ellipsibus, notandum occurrit, quòd, tametsi in ejusmodi tertii generis hyperbolis possit quoque quadrato-quadratum unius cujusque ordinatæ æquari cum plano-plano, quod sub quadratis lateris recti, & abscissæ correspondentis continetur, addito excessu simili, similiterque posito ei, quod fit ex quadrato lateris recti in quadratum lateris transversi; tamen non hinc hyperbolæ, quarum ea est natura, speciem alteram hyperbolarum tertii generis constituunt: quandoquidem nec tertii generis dici debent; cum, si ex utraque parte quadrata radix extrahatur, ad hyperbolas primi generis deprimantur.

Porro æquatio (indicantibus iisdem litteris eadem, quæ supra in Ellipsi) generalis pro omnibus hyperbolis, est $y^{m+n} = \overline{a + \frac{ax}{b}}^{m} \times x^{n}$ quæ ostenditur rectè efformata eodem prorsus modo, quo id demonstraſtratum fuit ſupra in æquatione generali poſita pro omnibus Ellipſibus. Et manifeſtum etiam eſt productum $\overline{a+x}^m \times x^n$ continere productum ex a^m in x^n auctum exceſſu ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod ex a^m in b^n. Nam $a + \frac{ax}{b}$ eſt quarta proportionalis ad latus tranſverſum, ad latus rectum, & ad $b + x$ ſummam abſciſſæ, & lateris tranſverſi. Statuatur modo A B latus tranſverſum, A C latus rectum; productâque AB, ſit AM abſciſſa quævis; &, ductâ MO parallela AC, protrahatur A C donec occurrat in O ipſi M O. Erit $MO = a + \frac{ax}{b}$. Idcircoque, quia productum ex MO^m in AM^n excedit productum ex AC^m in AM^n exceſſu ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod ex AC^m in AB^n, cum latera producentia ſint juxta eandem diagonalem BO; & reliqua ſint, uti ſupra in Ellipſi, patet propoſitum. Adplicetur modo, uti ſupra in Ellipſi, æquatio generalis ad Curvas deſignandas hyperbolicas cujuſvis generis: & demonſtrabitur eodem etiam modo rejecta bene eſſe ea Curva hyperbolica quadrato-quadratica a tertio genere earum, quam modo juſſimus eſſe inde removendam.

Fig. 12

Hac ratione recentiores Geometræ Conicas Veterum ſectiones in infinitum extenderunt; & infinitas Parabolas, Ellipſes, & Hyperbolas ad ipſarũ ſimilitudinem conſiderarunt. Sed priuſquam ad earum geneſim, & deſcriptionem deveniamus, non a re alienum erit breviter alias nonnullas proprietates memorare, quæ ex ipſa Curvarum natura immediate dependent. Probe tamen adverte nil hic modo à nobis dici, aut poni de harum Curvarum figura, ſitu, & deſcriptione,

ne; neque hunc locum horum eſſe; de quibus nonnulla dicentur in capite inſequenti. Sed ſolùm naturam, & proprietates præcipuas illarum modò enunciamus. Diametroſque dicimus lineas, ad quas ductæ è Curva lineæ ordinatim poſitæ relationem habent cum abſciſſis illarum: & idcirco lineas ejuſmodi nominare *Lineas abſciſſarum* ſolemus.

Igitur dicimus primò, quòd, ſi Curva A N N deſignet unamquamque ex parabolis infinitis; ut poteſtas quævis cujuſque ordinatæ M N æquet productum homogeneum, quod fit ex inferiori poteſtate lateris recti AC in poteſtatem reliquam abſciſſæ AM; quòd inquam, duarum, aut plurium ordinatarum M N poteſtates ſint ut poteſtates abſciſſarum correſpondentium A M. Etenim ſunt poteſtates illæ ut producta homogenea, quæ fiunt ex inferiori poteſtate lateris recti AC in poteſtatem reliquam abſciſſarum correſpondentium A M: unde cum ejuſmodi producta homogenea ſint ut poteſtates abſciſſarum AM, propter communem poteſtatem lateris recti A C; erunt ipſarum M N poteſtates ut poteſtates abſciſſarum correſpondentium A M.

Fig. 13.

Hinc ſi A N N ſit Parabola Cubica prioris ſpeciei, ita nempe, ut Cubus cujuſque ordinatæ M N ſit æqualis ſolido, quod fit ex quadrato lateris recti AC in abſciſſam correſpondentem, liquet Cubos duarum, aut plurium ordinatarum M N eſſe mutuo uti abſciſſæ correſpondentes N M; quandoquidem ſolida iis Cubis æqualia propter commune quadratũ lateris recti A C, eam inter ſe habent rationem, quæ eſt inter abſciſſas, & correſpondentes A M. Sed, ſi eadem Curva A N N ſit Parabola Cubica ſecundæ ſpeciei; ita ſcilicet ut Cubus cujuſque ordinatæ M N æqualis ſit ſolido, quod fit ex latere recto A C in quadratum abſciſſæ correſpondentis AM; palam eſt, Cubos

bos duarum, aut plurium ordinatarum MN esse ut quadrata correspondentium abscissarum AM; siquidem solida iis Cubis æqualia, propter communem altitudinem lateris recti AC, sunt uti dicta abscissarum quadrata.

Fig. 14

Secundò, quòd, si Curva ANN designet quamlibet ex Ellipsibus infinitis; ita nempe ut existente AC latere recto, potestas quævis cujusque ordinatæ MN adæquet homogenum productum, quod fit ex inferiori potestate rectæ MO in potestatem reliquam absc sæ correspondentis AM; quòd, inquam, eadem ordinatæ MN potestas sit ad homogenum productum, quod fit ex eadem potestate abscisæ AM in potestatem reliquam alterius portionis MB, ut ea lateris recti AC potestas, ad quam ascendit ipsa MB, aut MO ad homogeneam potestatem lateris transversi AB. Quamobrem si curva ANB sit Ellipsis Cubica prioris speciei, in qua nempe Cubus ordinatæ MN adæquet solidum, quod fit ex abscisa AM in quadratum rectæ MO, palam est, Cubum ejusdem ordinatæ MN esse ad solidum AM in MB quadratum, uti AC quadratum ad AB quadratum: & consequenter Cubos duarum, aut plurium ordinatarum MN esse inter se, uti correspondentia producta, quæ fiunt ex abscissis AM in quadrata reliquarum portionum MB. At vero si eadem Curva ANB sit Ellipsis Cubica alterius speciei, in qua nempe Cubus ordinatæ MN adæquat solidum ex quadrato abscisæ AM in rectam MO, liquet, Cubum ejusdem ordinatæ MN esse ad solidum ex AM quadrato in reliquam portionem MB, ut latus rectum AC ad latus transversum AB, proindeque Cubos duarum, aut plurium ordinatarum MN esse inter se ut solida correspondentia, quæ fiunt ex quadratis abscissarum AM in portiones reliquas MB.

Et

Fig. 15.

Et denique si Curva ANN designet quamlibet ex hyperbolis infinitis, ita scilicet, ut existente AB latere transverso, & AC latere recto, potestas quævis cujusvis ordinatæ MN adæquet homogeneum productum, quod fit ex inferiori potestate rectæ MO in potestatem reliquam abscissæ correspondentis AM, quod, inquam, eadem ordinatæ MN potestas sit ad homogeneum productum, quod fit ex eadem potestate abscissæ AM in potestatem reliquam alterius portionis MB, ex alio lateris transversi termino sumptæ, uti est ea lateris recti AC potestas, ad quam ascendit ipsa MB, aut MO, ad homogeneam potestatem lateris transversi AB: quare si Curva AN sit hyperbola Cubica prioris speciei, quia, ex dictis, hujus hyperbolæ ea est proprietas, ut Cubus cujusque ordinatæ MN adæquet solidum, quod fit ex abscissa correspondente AM in quadratum rectæ MO, erit Cubus ejusdem ordinatæ MN ad solidum, quod fit ex abscissa AM in quadratum portionis MB, ut est AC quadratum ad AB quadratum: consequenter Cubi duarum, aut plurium ordinatarum MN erunt inter se uti solida, quæ fiunt ex abscissis correspondentibus AM in quadrata portionum MB: &, si eadem Curva AN sit hyperbola Cubica alterius speciei, quia alterius hujus hyperbolæ ea est proprietas, ut Cubus cujusque ordinatæ MN adæquet solidum, quod fit ex quadrato abscissæ AM in rectam MO, erit Cubus ejusdem ordinatæ MN ad solidum, quod fit ex quadrato abscissæ AM in portionem MB, ut est AC ad AB; & consequenter Cubi duarum, aut plurium ordinatarum MN erunt inter se uti solida, quæ fiunt ex quadratis correspondentium abscissarum AM in portiones MB.

CAPUT IV.

CONICARUM SECTIONUM

Cujuſvis generis Deſcriptio.

ANalyticè procedimus. Poſtquam naturam Curvarum Conicarum infinitè productarum expoſuimus, earum præbere debemus deſcriptionem. Sola enunciatio naturæ, proprietatiſque Curvæ ſine deſcriptione, inane fere continet mentis commentum. Deſcriptio cujuſvis Curvæ ad duos modos generatim revocari poteſt. Alter eſt modus Organicus, ſeu Mecanicus; qui ad effectionem, vel, uti ajunt, ad praxim revocari poteſt. Alter eſt Geometricus; qui accurate ad praxim nequit perduci. Deſcriptiones omnes Curvarum confectæ ſupra corpora ſolida; & deſcriptiones effectæ in plano per inſtrumenta Mechanica, aut lignea, aut metallica, ſive per fila, ſive per regulas, motu adhibito, ſunt deſcriptiones primi generis. Deſcriptiones verò deductæ ex proprietate aliqua Curvæ (expeditior ſemper, clariorque proprietas eſt deligenda) ſunt deſcriptiones generis poſterioris. Deſcribitur ſeries punctorum, ſeu deſcribuntur puncta continuata, locataque juxta hanc proprietatem; & ſuper illis Curva delineatur, quæ ad inflexum quæſitum proximè quidem accedit, non tamen exactè. Sic ſi deſcribantur puncta continuata A A A in extremitatibus linearum A N; quæ A N ſint ſemper mediæ proportionales inter B N, & N D ſegmenta datæ longitudine rectæ lineæ B D, ſintque ex B D normaliter excitatæ; ducatur vero ſupra A A A Curva B A D; hæc erit ſemicirculus: quòd ſi idem ex alia parte fiat eodem modo, Circulus integer deſcribetur. Geometrica verò erit Circuli deſcriptio; non exacte, uti vides, ad praxim deducenda: & manifeſtum eſt, organicas Curvarum deſcriptiones quovis modo acceptas longe præferendas eſſe Geometricis. Fig. 16

Veteres Geometræ Parabolæ, Ellipſis, & Hyperbolæ generationem tradituri eam ex varia Coni per planum ſectione deduxerunt: indeque factum eſt, ut Curvas illas nominarint Conicas ſectiones. Etenim concipiebant ex. gr. Conum A B C, primò ſectum plano per axem pertranſeunte, ut fieret triangulum maximum BAC; tum eumdem Conum ſecabant alio plano, quod ad baſim Coni inclinatum rectum eſſet ad Baſim triang. per axem ſecti B C. Eſt vero Conica ſuperficies ea, quam deſcribit recta linea ex puncto aliquo ſublimi ad circuli circumferentiam ducta; ſi, fixo manente illo puncto ſublimi, linea percurrit circuli circumferentiam, donec ad eumdem redeat locum, unde cœperat moveri. Eſt autem Conus corpus ſolidum Conica ſuperficie, & circulo ipſo tamquam baſi contentum. Fig. 17.

Hinc, ſi ſecundum planum dictum ita ſit ad baſim Coni inclinatum, ut uni laterum ipſius trianguli æquidiſtet, generabitur ſectio Coni Parabolica: ſi vero taliter inclinetur, ut utrique lateri in ipſo Cono occurrat, producetur ſectio Coni Elliptica; quæ poterit etiam eſſe circuli circumferentia, ſi ſcilicet planum ſecans ſubcontrarie occurrat plano baſis; ita nempe ut ex triang. per axem aliud triang. ipſi ſimile abſcindat: & ſi denique planum ſecans ita fuerit ad baſim Coni inclinatum, ut unum latus in Cono, alterum extra Conum productum offendat, ſectio orie-

orietur hyperbolica. In his omnibus casibus diameter exortæ sectionis erit linea illa, quæ est communis sectio plani secantis cum plano triang. per axem secti: ordinatæ erunt omnes illæ rectæ lineæ, quæ ducuntur æquidistantes ei, in qua planum secans occurrit plano basis, & quæ perpendicularis est basi triang. per axem secti B G.

Hæc omnia exinde deducuntur, quòd si Conus plano secetur æquidistante plano basis; sectio in Coni superficie orta, æque ac ipsa basis, est Circuli circumferentia: id quod ex ipsa Coni genesi modo exposita promanat; & in Conicis demonstratur. Et quidem palam est, Conum aliud non esse, quàm seriem plurium circulorum ita quidem inter se ordinatorum, ut eorum diametri minores majoribus ordine insistentes, in Arithmetica proportione existant: unde cum omnes ii Circuli sint plano basis æquidistantes; patet utique, secto Cono per planum æquidistans basi, sectionem in Coni superficie confectam, perinde ac ipsius basis perimetrum, esse circuli circumferentiam. Et, cum eorum omnium circulorum centra sint in axe Coni, scilicet in illa recta linea, quæ ex vertice Coni ad centrum basis ducitur; patet etiam diametrum circuli confecti per planum basi æquidistans, & secans, esse rectam illam lineam, quæ est communis sectio plani secantis, cum plano trianguli per axem secti, quippe quæ per ipsius centrum transiicitur.

Fig 18

Secetur primò Conus A B C plano, quod insistens ad angulos rectos Basi B C triang. per axem secti B A C, taliter sit ad planum basis Coni inclinatum, ut communis ejus sectio cum plano triang. E G sit parallela lateri uni A B ejusdem triang. & facta sit in Coni superficie sectio D E F. Sumatur in E G punctum quodvis aliud I, per I agatur recta H I L parallela B C: & agatur planum H M L æquidistans plano basis; sitque MN communis sectio alterius hujus plani cum plano D E F. Erit M N perpendicularis ipsi I H L, cum DF ad rectos ang. insistat ipsi BC; & sint parallelæ M N, D F, quia sunt parallelæ BC, H L. Et quoniam BC, H L sunt diametri circulorum BDC, H M L, atque iis sunt perpendiculares rectæ D F, M N, erit per circuli naturam tum D G quadratum æquale rectang. B G C, quùm M I quadratum æquale rectang. H I L. Ergo ut D G quadratum ad M I quadratum, ita rectangulum BGC, ad rectangulum HIL, seu uti G C, ad I L, vel etiam uti EG ad E I, cum similia sint triang. E G C, E I L; quare erit ex æqua ratione, D G quadratum ad M I quadratum, uti E G ad E I; proindeque sectio facta D E F erit illa eadem Curva linea quæ *Parabola* appellatur.

Fig. 19.

Secundò secetur idem Conus ABC plano, quod insistens etiam ad rectos angulos basi triang. per axem secti B C taliter sit ad planum basis Coni inclinatum, ut recta EG communis sectio plani secantis cum plano triang. alterius producta occurrat lateri alteri A B in ipso Cono in puncto P. Et sit facta in superficie Coni sectio D E F. Sumatur quodvis aliud punctum I in ipsa EG, uti antea, per quod agatur primò recta H I L parallela basi trianguli BC; tum Planum HML planum basis B D C æquidistans; eritque similiter recta M N, communis sectio alterius hujus plani secantis cum plano D E F, ipsi H L perpendicularis; perinde ac D F perpendicularis est ipsi BC. His positis: quoniam rectæ BC, H L sunt Diametri circulorum BDC, H M L, atque iis ad rectos angulos insistunt rectæ D F, M N, erit per Circuli naturam tùm D G quadratum æquale rectang. B G C, quùm M I quadratum æquale rectang. H I L: proindeque erit ut D G quadratum ad M I quadratum, ita rectang. B G C ad rectang.

ctang. HIL. Sed rectang. BGC est ad rectang. HIL in ratione composita ex BG ad HI, & ex GC ad IL, sive etiam in ratione composita ex PG ad PI, & ex EG ad EI; cum similia sint triangula PBG, PHI, & triang. CGE, LIE; aut denique, componendo has rationes, uti rectang. PGE, ad rectang. PIE; ergo erit, ex æqua ratione, ut DG quadratum, ad MI quadratum, ita rectangulum PGE ad rectangulum PIE: idcircoque sectio DEF facta erit illa eadem Curva linea quæ *Ellipsis* nominatur.

Potest autem eadem sectio DEF esse circuli circunferentia; si scilicet plannm secans DEF sit subcontrarie positum plano basis, ita nempe ut EGP communis sectio plani secantis cum plano trianguli per axem abscindat triangulum PAE simile triangulo CAB; sed eidem subcontrarie positum, ita ut ang. APE, æqualis sit angulo ACB; & ang. AEP æqualis ang. ABC. Nam tum triang. BGP, EGC erunt similia. Unde, cum ob hanc similitudinem BG sit ad GP, uti GE ad GC erit rectang. BGC æquale rectang. PGE; & consequenter, quia rectangulo BGC æquale est DG quadratum, erit idem DG quadrato æquale etiam rectang. PGE. Ostensum est autem DG quadratum esse ad MI quadratum, ut rectang. PGE; ad rectang. PIE, igitur erit etiam rectangulum PIE æquale MI quadrato. Quare, si DF, MN, ipsi GE sint perpendiculares; quod quidem contingit cum planum DEF ad ang. rectos occurrit ipsi BGC; quia Curva DEF est ejus naturæ, ut, demissa ad rectam PE quavis perpendiculari MI, sit semper MI quadratum æquale rectangulo PIE; liquet eam esse Circuli circumferentiam, ejusque diametrum esse rectam PE.

Fig. 20. Secetur denique idem Conus ABC plano, quod occurrens plano basis in recta linea DF, perpendiculariter ad basim trianguli insistente, taliter sit ad ipsum planum basis inclinatum, ut lateri alteri ejusdem triang. AB occurrat, sed extra Conum producto in puncto P; recta GE communis sectio plani hujus secantis cum plano triang. per axem secti sit quidem; atque sit confecta in Coni superficie sectio DEF. Sumatur modo hic etiam in ipsa EG quodvis aliud punctum I per quod agatur tùm recta HL ipsi BC parallela, quùm Planum HML æquidistans plano basis BDC: sitque MN communis sectio alterius hujus plani cum plano DEF; quæ erit propterea ipsi HL perpendicularis. Et quoniam rectæ BC, HL sunt diametri Circulorum BDC HML, atque iis ad rectos ang. insistunt rectæ DF, MN; erit per Circuli naturam tùm DG quadratum æquale rectang. BGE, quùm MI quadratum æquale rectang. HIL: adeoque erit ut DG quadratum ad MI quadratum, ita rectangulum BGC ad rectang. HIL. Jam vero rectang. BGC est ad rectang. HIL in ratione composita ex BG ad HI, & ex GC ad IL; sive etiam in ratione composita ex PG, ad PI, & ex GE ad IE; cum similia sint tùm triang. PBG, PHI; quùm triangula EGC, EIL; aut denique, componendo has rationes, ut rectangulum PGE ad rectang. PIE; igitur erit ex æqua ratione, ut BG quadratum ad MI quadratum; ita rectangulum PGE ad rectang. PIE. Proindeque liquet, sectionem DEF hoc pacto in Coni superficie resectam esse eamdem illam lineam Curvam, quæ dicitur *Hyperboles*.

Hac igitur ratione ex varia Coni sectione per planum Veteres Geometræ Parabolæ, Ellipsis, Hyperbolæ genesim tradidere. Sed, cum Recentiores infinitas Parabolas, infinitas Ellipses, & infinitas denum hyperbolas ad illorum similitudinem excogitaverint, opus

opus ipsis fuit Conos alios superioris generis efformare, ut ex varia eorum sectione omnium illarum Curvarum genesis obtineretur. Ad hoc Circulos etiam alios in infinitum excogitarunt; in quibus non quadratum dumtaxat demissæ perpendicularis ad diametrum, sed quælibet ejus potestas æqualis sit homogeneo producto ex aliis minoribus potestatibus portionum diametri, ut satis supra diximus; unde, quemadmodum Veterum Conus pro basi Circulum vulgarem habebat, ita & apud Recentiores alii Coni Circulos hos infinitos habent pro basibus.

Et quidem quemadmodum Veterum Ellipsis in circulum mutatur, cum, ordinatis ad rectos ang. insistentibus abscissis, latus rectum æquat latus transversum; ita & recentiorum Ellipses infinitæ in Circulos infinitos transibunt, si similiter ordinatæ & perpendiculariter insistant abscissis, & ipsarum latus rectum adæquet latus transversum. Ratio est. Nam sicuti in Ellipsi Veterum quadratum cujusvis ordinatæ est ad rectang. sub lateris transversi portionibus contentum, uti latus rectum ad latus ipsum trasversum; adeoque, supposita æqualitate lateris recti, & lateris transversi, quadratum ejusdem ordinatæ adæquat rectang. sub dictis portionibus contentum; quæ est proprietas prima Circuli; modo tamen ordinata ad rectos angulos transverso lateri occurrat: ita etiam in Ellipsibus infinitis Recentiorum, potestas cujusvis ordinatæ est ad productum homogeneum, quod fit ex potestate inferiori abscissæ correspondentis in potestatem reliquam alterius portionis lateris transversi, ut est ea lateris recti potestas, ad quam ascendit altera illa portio, ad homogeneam potestatem lateris transversi. Hinc, supposita æqualitate lateris recti, & transversi, potestas ejusdem ordinatæ fit æqualis producto homogeneo ex inferiori potestate abscissæ correspondentis in potestatem reliquam alterius portionis, quæ est proprietas circulorum infinitorum. Dummodo tamen ordinatæ ad ang. rectos transverso lateri occurrant. Quare eadem omnia, quæ de infinitis Ellipsibus, & etiam de variis earum generibus supra diximus, locum etiam habent in Circulis infinitis.

Circulus Cubicus, uti ceteræ omnes Curvæ numero imparium dimensionum, in se redire nequaquam potest; sed pergit in infinitum. Quare in duobus punctis secare minime valet lineam rectam datam, determinatamque longitudine, cujus abscissæ relationem habent cum ordinatis, quæ radices sunt æquationis Curvæ. Ita, si ADB sit Cubica Curva, & AB recta datæ longitudinis; & sint Fig. 21.

$MN^3 = AN^2$ in NB; vel $= AN$ in NB^2; non secabit ADB in duobus punctis AB; secus acceptis NO ex altera parte æqualibus NM, & ad eundem angulum supra AB; ita ut fiant quoque $NO^3 = AN^2$ in NB, vel $= AN$ in NB^2; Curva AO per continuata puncta O perducta permearet quoque per B, secaretque AB, & ADB in B; & Curva esset in se rediens: quod absurdum. His positis. Concipiatur primo Curva CDE Circulis quilibet numero imparium dimensionum in se non rediens; cujus linea abscissarum CB. Sit punctum A sublime in alio plano: & linea AC utrimque indefinite producta, perque CDE peripheriam circumducta superficiem Conicam imperfectam ACDE utrimque generabit; quæ concludatur, finiaturque triangulo AEB constituto a junctis AE, EB, AB: & Solidum hac superficie contentum erit Semiconus imperfectus, vel mixtilineus CEABE constans ex figura Curva ACE, & recta AEB. Manifestum vero est, secto Fig. 22.

 Cono

Cono plano per verticem A offendente basim in CB, sectionem A B C esse triangulum maximum. Secetur modo hæc figura plano alio HNML parallelo plano basis B E D C; erit H N M L sectio similis, similiterque posita basi BEDC; & AHN Triangulum, ac NML Circulus ejusdem naturæ, cum subjecta basi. Nam est quidem HN, communis sectio plani secantis, & trianguli ABE, linea recta parallela BE ex constructione; (& *16. xi. Element.*) Quare AHN triangulum erit simile triang. ABE. Modo erit HL, communis sectio plani secantis, & triang. ABC, parallela eadem ratione ipsi BC. Accipiatur M punctum quodvis in sectione genita; jungatur AM, quæ protrahatur occurrens plano basis in D. Agatur AG ex A ad BC, & sit G punctum in ipsamet linea BC. Jungantur DG, MI; quæ sunt communes sectiones trianguli ADG cum planis parallelis; idcircoque parallelæ. Igitur erit DG . MI :: GC . IL :: GB . IH. Quare $DG^3 . MI^3 :: GC^2$ in GB . IL^2 in IH. Sive etiam $DG^3 . MI^3 ::$ GC in GB^2 IL in IH^2. Est vero $DG^3 = GC^2$ in GB; seu = GC in GB^2. Ergo erit quoque $MI^3 = IL^2$ in IH; sive = IL in IH^2. Sumptum vero fuit M punctum in sectione quodvis. Quare sectio NML erit Circulus Cubicus ejusdem naturæ cum Circulo basis, similisque ei, & positus similiter Q. E. D. Hæc spectant ad casum, quo Circulus Cubicus, aut alius ex infinitis non occurrit cum linea abscissarum nisi in uno puncto. Quod si in duobus, aut pluribus punctis nonnulli Circuli ex his infinitis, de quibus agimus, cum illa occurrit; facilis sane erit ex his, quæ modo diximus, (ne-

(necessaria quidem observatu pro eo casu Circulorum,) & ex iis, quæ vulgo traduntur in Conicis, intelligentia Conicæ figuræ, quæ poterit supra illos generari pro sectionibus in ipsa Conica figura faciendis, quæ infinitas nostras Curvas describant.

Ne vero aliquid desideretur; æquatio generalis Circulorum omnium in infinitum productorum erit $y^{m+n} = x^m \overline{X a - x}^n$; eadem ac æquatio generalis Ellipsium; differentiæ vero sunt, quas nuper supra docuimus. Hic si $m = 1$ & $n = 2$. Erit Circulus Cubicus prioris speciei, $y^3 = aax - 2axx + x^3$. Si vero $m = 2$ & $n = 1$. Erit Cubicus Circulus alterius speciei $y^3 = axx - x^3$. Et ita de reliquis.

His positis; concipiatur Conus ABC cujus basis BDC repræsentet aliquem quemvis ex circulis infinitis modo explicatis, ut potestas quævis cujusvis ordinatæ DG adæquet productum homogeneum ex aliis duabus inferioribus potestatibus portionum correspondentiũ BG, GC lineæ abscissarũ BC; si modo, secto hoc Cono plano, quod per verticem transiens offendat planum basis in ipsa linea BC, ita ut fiat triang. maximum BAC; & deinde secetur idem Conus BAC plano alio, quod occurrat plano basis in recta DI ipsi BC perpendiculari; & fiat sectio; juxta varias alterius istius plani positiones habebuntur omnes illæ Curvæ infinitæ à Recentioribus excogitatæ. Nam siquidem hoc planum taliter sit inclinatum, ut recta EG communis sectio plani secantis cum plano trianguli, sit lateri AB parallela; generabuntur infinitæ Parabolæ, & varii generis, juxta varia generea circulorum, qui sunt bases Coni: si vero taliter inclinetur, ut eadem recta EG occurrat lateri alteri AB in ipso Cono, orientur infinitæ Ellipses uti supra; quæ poterunt quoque esse

Fig 23.

esse Circuli infiniti juxta dicta. Et varia Ellipsium genera procreabuntur juxta varia genera circulorum, qui sunt bases Coni. Ac denique si ita fuerit inclinatum, ut eadem recta EG lateri alteri AB occurrat extra Conum uti supra; producentur infinitæ hyperbolæ; & varia earum genera juxta varia genera Circulorum, qui sunt bases Coni. Atque in omnibus his casibus ortæ sectionis diameter, sive linea abscissarum erit ipsa recta EG; ordinatæ verò omnes rectæ, quæ ipsi DGF parallelæ ducuntur.

Fig. 24

Et quidem sit primo recta EG parallela lateri AB; &, sumpto in ea quovis alio puncto I, agatur per illud recta HIL parallela BC; tum planum HML plano basis BDC agatur æquidistans, sitque MI communis sectio alterius hujus plani cum plano DE; quæ cum sit ipsi DG parallela, erit quoque rectæ HL perpendicularis. Et quoniam ex genesi Coni, & ex iis, quæ dicta supra sunt, cum agebatur de Circulis numero imparium dimensionum, qui sint bases Coni, ipsi Circuli BDC, HML sunt ejusdem non modo generis, sed etiam naturæ, & speciei; jam, si m dicatur exponens potestatis, ad quam ascendit portio una BG lineæ abscissarum BC ipsius Circuli, qui est basis Coni, & n dicatur exponens potestatis, ad quam ascendit portio altera GC, ita ut in basi ipsa semper sit, uti diximus, $DG^{m+n} = BG^m$ in GC^n; erit tùm $DG^{m+n} = BG^m$ in GC^n; quùm $MI^{m+n} = HI^m$ in IL^n. Ergo erit ut DG^{m+n} ad MI^{m+n} ita BG^m in GC^n ad HI^m in IL^n. Sed propter parallelogram. GH, est $BG^m = HI^m$. Igitur erit BG^m in GC^n ad HI^m in IL^n

in IL^n, veluti GC^n ad IL^n; ac idcirco, quia propter similia triang. EGC, EIL; est GC^n ad IL^n uti EG^n ad EI^n; erit, ex æquali, uti DG^{m+n} ad MI^{m+n} ita EG^n ad EI^n; ergo sectio DE erit illa Curva linea, quæ quamlibet ex infinitis Parabolis potest repræsentare. Si basis Coni BDC sit Circulus Cubicus prioris speciei, erit DE sectio Parabolica Cubica prioris speciei; si sit Circulus Cubicus alterius speciei; erit sectio Parabolica Cubica alterius speciei; si sit Circulus Cubicus quadrato-quadraticus, erit sectio Parabolica quadrato-quadratica, atque ita de reliquis.

Fig. 25.

Sit secundò planum basis secans DE taliter ad planum basis BDC inclinatum, ut recta EG communis sectio plani secantis cum triangulo per verticem occurrat lateri AB in ipso Cono in puncto P. Et posita sint omnia, quæ suprà. Erit etiam DG^{m+n} ad MI^{m+n} uti BG^m in GC^n ad HI^m in IL^n. Et quoniam BG^m in GC^n est ad HI^m in IL^n in ratione composita ex BG^n ad HI^m & ex GC^n ad IL^n; profecto quia propter similitudinem triangulorum PBG, PHI; est BG^m ad HI^m uti PG^m ad PI^m; atque etiam propter similia triangula CGE, LIE, est GC^n ad IL^n uti GE^n ad IE^n; erit BG^m in GC^n ad HI^m in IL^n in ratione composita ex PG^m ad PI^n, & ex GE^n ad IE^n; sive componendo has rationes, uti PG^m in GE^n ad PI^m in in IE^n. Quare erit ex æqua ratione, uti DG^{m+n} ad MI^{m+n} ita PG^m in GE^n ad PI^m in IE^n. Ergo sectio DE erit illa eadem Curva, cui infinitarum Ellipsium convenit natura. Et eodem modo, si Circulus basis Coni sit Cubicus alterutrius speciei, vel quadrato - quadraticus [& ita de reliquis cujusvis speciei] sectio DE Elliptica erit ejusdem speciei.

Fiet vero figura, seu sectio Elliptica DE aliquis ex Circulis infinitis; si planum DE insistat ad angulos rectos plano basis BDC; & BG^m ad PG^m sit ut GE^n ad GC^n. Nam tum erit PG^m in GE^n = BG^m in GC^n. Unde quia etiam ipsi BG^m in GC^n æqualis est potestas ipsius DG, cujus index est $m+n$; erit etiam $DG^{m+n} = PG^m$ in GE^n. Ostensum verò est, DG^{m+n} esse ad MI^{m+n} uti est PG^m in GE^n ad PI^m in IE^n; quare erit etiam $MI^{m+n} = PI^m$ in IE^n: ac proinde quia Curva DE est talis naturæ, ut demissa MI qualibet normali ad PE, quælibet potestas MI æquet productum homogeneum, quod ex aliis duabus minoribus potestatibus correspondentium portionum PI, IE; liquet eam repræsentare unumquemque ex Circulis infinitis; & esse ejusdem tum generis, tum speciei cum Circulo BDC, qui basis est Coni.

Fig. 26. Sit denique idem planum secans DE taliter inclinatum ad planum basis BDC, ut eadem communis sectio EG occurrat alteri lateri AB extra Conum producto in puncto P; & factis similiter omnibus uti antea, erit quoque DG^{m+n} ad MI^{m+n} uti BG^m in

in GC^n ad HI^m in IL^n. Jam vero BG^m in GC^n est ad HI^m in IL^n in ratione composita ex BG^m ad HI^m, & ex GC^n ad IL^n. Igitur, quia propter similitudinem triangulorum PBG, PHI, est BG^m ad HI^m uti PG^m ad PI^m: & propter similitudinem triangulorum EGC, EIL, est GC^n ad IL^n uti EG^n ad EI^n; erit BG^m in GC^n ad HI^m in IL^n in ratione composita ex PG^m ad PI^m, & ex EG^n ad IE^n. Sive, componendo has rationes, uti PG^m in GE^n ad PI^m in IE^n. Ergo erit, ex æqua ratione, DG^{m+n} ad MI^{m+n} ita PG^m in GE^n ad PI^m in IE^n. Quæ proprietas generatim spectans ad omnes hyperbolas. Quare sectio DME erit illa eadem Curva linea, quæ unamquamque ex infinitis hyperbolis potest repræsentare. Et si basis Coni sit Circulus Cubicus alterutrius speciei, vel quadrato - quadraticus, & ita de reliquis cujusvis speciei, erit sectio DME Curva hyperbolica similis omnino speciei.

Sectiones Conicas quaslibet in Cono descriptas contemplati sumus, nulla tamen ratione habita parametri, seu lateris recti in ejusmodi descritionibus inventi. De hac re nonnulla adiiciemus. Quantùm ad sectiones Conicas Apollonianas, vulgò id traditur in Conicis. Igitur dicemus de his Curvis infinitè productis, initium a Parabolis sumentes. Sit Conus BAC, & fiat sectio per verticem triangularis BAC. Fig. 27. Et sit basis Coni Circulus Cubicus; fiatque more consueto

sueto sectio MKN per planum parallelum basi: & in Circulo Cubico basi Coni sit $DG^3 = CG^2$ in BG; inque alio parallelo ea ratione sit $KL^3 = NL^2$ in LM: sunt jam DG, KL ordinatæ horum Circulorum. Modo quæratur Parabola Cubica prioris speciei: erecta ex puncto F normali FH; si fiat $BC^3 . BA^2$ in $AC :: HF^2 . FA^2$; facta sectione more consueto Parabolarum, erit FD Parabola Cubica prioris speciei in Cono descripta, cujus parameter ipsa FH. Oportet autem, ut planum secans, communisque sectio FG locetur in ea parte, in qua est BG, seu ML ad minorem, vel simplicem potestatem evecta in solido GC^2 in $GB = DG^3$: vel ML in $LN^2 = KL^3$. Etenim $HF^2 . FA^2 :: BC^3 . BA^2$ in AC. Quare erit HF^2 ad FA^2 in ratione composita ex BC ad AC, & ex BC^2 ad BA^2. Sive in ratione composita ex MN ad NA, vel ML ad LF; & ex MN^2 ad MA^2, vel ML^2 ad MF^2; aut etiam LN^2 ad FA^2. Igitur erit $HF^2 . FA^2 :: ML$ in $LN^2 . LF$ in FA^2. Nunc est $HF^2 . FA^2 :: HF^2$ in $FL . FA^2$ in FL. Ergo ML in $LN^2 . LF$ in $FA^2 :: HF^2$ in $FL . FA^2$ in FL. Idcircoque ML in $NL^2 = HF^2$ in FL. Sed ML in $NL^2 = KL^3$. Quare etiam $KL^3 = HF^2$ in FL. Igitur HF erit parameter Parabolæ hujus Cubicæ prioris speciei in Cono descriptæ Q. F. O.

Si verò, præstitis omnibus quæ antea, fiat [*eadem Figura*] $BC^3 . BA$ in $AC^2 :: HF . FA$. Erit HF parameter Parabolæ Cubicæ secundæ speciei. Oportet autem, ut sectio fiat ex parte, in qua est BG^2, sive ML^2, idest segmentum majoris potestatis in solido BG^2 in $GC = DG^3$, vel ML^2 in $LN = KL^3$: quod si fiat $BC^4 . BA^3$ in $AC :: HF^3 . FA^3$, & fiant omnia, quæ oportet in Cono descripto, uti opus; erit HF parameter quadrato - quadraticæ Parabolæ primæ speciei. Si $BC^4 . BA$ in $AC^3 :: HF . FA$. Erit eadem AF parameter quadrato - quadraticæ Parabolæ secundæ speciei. Semper verò oportet, ut, cum in Curvis hisce parameter habet majorem potestatem, quàm abscissa; sectio locetur ex parte, in qua unum segmentum lineæ abscissarum basis Coni, sicuti & alterius Circuli paralleli, habet minorem potestatem, quàm alterum, vel etiam simplicem. Contra verò cum in Curvis hisce parameter habet minorem potestatem, quàm abscissa; sectio locanda est ex parte, in qua unum segmentum lineæ abscissarum basis Coni, vel alterius Circuli paralleli, habet majorem potestatem, quàm alterum segmentum ejusdemmet lineæ abscissarum.

Demonstratur autem casus Parabolæ Cubicæ secundæ speciei cum sua adposita conditione, hoc pacto. Nam sit (*eadem Figura*) Conus BAC: & omnia ponantur uti antea; at, ob conditionem, debet esse $DG^3 = BG^2$ in GC [unde $KL^3 = ML^2$ in LN]; ita enim est locata in Figura sectio ipsa FDK, & ipsa

ipsa etiam FG communis sectio plani secantis cum triangulo per verticem, seu linea abscissarum, ut sit ea ex parte BG, seu ML ad potestatem eductæ majorem. Modo est HF. FA :: BC^3. BA in AC^2. Quare HF ad FA rationem habebit compositam ex ratione BC ad BA, & BC^2 ad AC^2; sive compositam ex MN ad MA, vel ML ad MF, sive etiam LN ad FA, & ex MN^2 ad NA^2, vel ML^2 ad LF^2. Igitur HF. FA :: LN in LM^2. FA in LF^2. Sed HF. FA :: HF in LF^2. FA in LF^2. Hinc LN in LM^2. FA in LF^2 :: HF in LF^2. FA in LF^2. Atque idcirco LN in LM^2 = HF in LF^2; sive HF in $LF^2 = KL^3$. Quare Curva erit Parabolica secundæ speciei. Et faciles sunt demonstrationes eodem modo instituendæ pro reliquis casibus. Et ita etiam de reliquis Curvis Parabolis; & de conditione adposita locationis, seu sitûs plani secantis, & sectionis ejus cum triangulo per axem est dicendum; quorum intelligentiæ lumen satis adferent, quæ modo diximus, expositæque demonstrationes.

Porro, sicuti describetur in dato Cono Parabola quadratica datam habens parametrum; si (*eadem Fig.*) abscindatur in AB latere trianguli per verticem Coni portio FA, quæ sit quarta proportionalis ad BC^2, ad BA in AC (sunt quidem BC, CA, AB latera trianguli dicti per verticem Coni) & ad HF datam parametrum; uti in Conicis; ita quoque describetur in dato Cono Parabola Cubica primæ speciei datæ parametri HF (*eadem Fig.*) Si ex AB latere ejusdem trianguli BAC abscindatur AF cujus quadratum sit quarta proportionalis ad BC^3, ad BA^2 in AC, & ad HF^2. Est enim in ea Parabola parameter data HF; si ea fiat proportio. Quare problema planum erit duarum dimensionum; si tamen triangulum per verticem Coni non sit æquilaterum. Et ita describetur Parabola Cubica secunda datæ parametri HF; si ipsa eadem portio FA sit quarta proportionalis ad BC^3, ad BA in AC^2 & ad HF. Et describetur in dato Cono Parabola quadrato-quadratica prioris speciei datæ parametri HF, si Cubus ipsius FA sit quarta proportionalis ad BG^4, ad BA^2 in AC^2, & ad HF^3. Problema est solidum: si tamen triangulum per verticem non sit æquilaterum. Invenietur autem hoc pacto. In triangulo maximo per verticem dati Coni (*eadem Fig.*) dicantur latera $BC = a$. $BA = b$. Et $CA = c$; dicatur verò parameter data p; & FA quæsita x. Erit ex conditione

$$x^3 = \frac{p^3\, bbcc}{a^4}.$$

Hæc æquatio continet duas medias proportionales inter b, & $\frac{p^3\, cc}{a^4}$. Nam resolvitur in b. x. $\frac{xx}{b}$. $\frac{p^3\, cc}{a^4}$ continue proportionales. Hinc si inveniatur valor x primæ mediæ proportionalis duarum, noscetur FA quæsita. Igitur sint duæ lineæ FO, DQ ad angulos rectos in B; & in DQ sit $BD = b$. Parametro BD, axi BO describatur Parabola Apollo- Fig. 28.

niana

niana BEN; accepta vero in FO portione $BF = \frac{p^3\,cc}{a^4}$, deſcribatur alia Parabola Apollonii BNG parametro BF, axi vero BQ: & ſiquidem ea ſecat aliam Parabolam in N, problemate exiſtente poſſibili, ex puncto interſectionis N ordinentur NP, NM ad ſuas Parabolas; erit BM valor quæſitus. Nam eſt BM prima duarum mediarum proportionalium BM, & MN inter DB (b), & BF ($\frac{p^3\,cc}{a^4}$): quare erit $= x =$ FA. Etenim eſt DB . PN (ſive BM) :: BM . BP (ſive MN): & BM . MN :: MN . BF. Ob Parabolas. Ergo fient $b . x . \frac{xx}{b} . \frac{p^3\,cc}{a^4}$ continue proportionales. Et idcirco $x^3 = \frac{p^3\,bbcc}{a^4}$.

Fig.27. Hinc ſi abſcindatur in AB portio AF = BM, erit ea linea quæſita. Et ita de aliis Parabolis.

De Ellipſibus eſt modo dicendum deſcriptis in dato Cono cum ſua parametro data EQ. [*Fig*. 25.] Fiat ſectio BAC trianguli per verticem Coni, ex A ducatur AK occurres cum BC producta in K. Et efficiatur ſectio Elliptica in Cono more conſueto; ita ut communis ſectio EP plani ſecantis cum dicto triangulo ſit parallela AK; occurrens lateri AB in ipſo Cono in puncto P. & ſint DG, MI ordinatæ baſis Coni, & ejus paralleli. Educatur ex E linea EQ normalis DG. Et ſiquidem Cubicus Circulus baſis Coni is ſit, ut $DG^3 = CG$ in GB^2; quare etiam in alio Circulo parallelo ſit $MI^3 = LI$ in IH^2; ſi fiat

ſi fiat

ſi fiat $AK^3 . CK$ in $KB^2 :: PE^2 . EQ^2$; erit EQ parameter ſectionis Ellipticæ Cubicæ primæ ſpeciei. Oportet autem, ut planum ſecans, haud ſecus ac in Parabola, locetur ex parte GC, vel LI ad ſimplicem, vel minorem poteſtatem eductæ in dicto ſolido CG in GB^2, vel LI in IH^2. Demonſtratur. Agatur ex I linea IO parallela EQ ſecans junctam PQ in O: eſt PE^2 ad EQ^2 uti AK^3 ad CK in KB^2. Ergo PE^2 ad EQ^2 erit in ratione compoſita ex AK^2 ad BK^2, & ex AK ad CK. Atqui AK . CK :: EG . GC :: EI . IL. Et $AK^2 . BK^2 :: PG^2 . GB^2 :: PI^2 . IH^2$. Igitur $PE^2 . EQ^2$ in ratione compoſita erit ex EI ad IL, & ex PI^2 ad IH^2. Componantur hæ rationes; erit $PE^2 . EQ^2 ::$ EI in PI^2 . IL in IH^2. Verùm $PE^2 . QE^2 :: PI^2 . IO^2 :: PI^2$ in IE . IO^2 in IE. Quare erit EI in PI^2. IL in $IH^2 :: PI^2$ in IE . IO^2 in IE. Idcircoque IL in $IH^2 = IO^2$ in IE. Unde, cum ſit per ſectionem circularem parallelam baſi, IL in $IH^2 = MI^3$. Erit quoque $MI^3 =$ IE in IO^2. Quæ eſt Ellipſis Cubica primæ ſpeciei, cujus eſt EQ parameter. Nam Cubus ordinatæ eſt æqualis ſolido, quod ex quadrato lateris recti in abſciſſam correſpondentem, minus ſolido ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod ex eodem latere recto quadrato in latus tranverſum. Etenim IE in IO^2

deficit

deficit à solido ex IE in EQ^2, alio solido simili, similiterque posito illi, quod ex EQ^2 in EP; cum sint circa eandem diagonalem PQ. Q.F.O.

Quòd si efficiatur $AK^3 . CK^2$ in KB :: EP. EQ. [*eadem Fig.* 25.] erit, præstitis omnibus uti supra, Ellipsis Cubica secundæ speciei, cujus parameter EQ. Oportet autem, ut sectio fiat ex parte CG, vel IL ad majorem potestatem ductæ in solido CG^2 in $GB = DG^3$; vel in solido LI^2 in $IH = MI^3$. Nam: EP. EQ erit in ratione composita AK ad KB, & AK^2 ad CK^2, sive PG ad GB, vel PI ad IH; & AK^2 ad CK^2, vel EG^2 ad GC^2, seu EI^2 ad IL^2. Et compositis rationibus; erit EP. PQ :: PI in EI^2. IH in IL^2. Sed etiam PE. EQ^2 :: PI. IO :: PI in IE^2. IO in IE^2. Igitur PI in EI^2. IQ in IL^2 :: PI in IE^2. IO in IE^2, & idcirco IH in IL^2 = IO in IE^2. Quare erit MI^3 = IO in IE^2. Et erit Ellipsis Cubica secundæ speciei in qua EQ parameter. Cubus enim ordinatæ est æqualis solido, quod ex quadrato abscissæ correspondentis in latus rectum, minus solido simili, similiterque posito ei, quod ex eodem latere recto in quadratum lateris transversi. Et si fiat, præstitis omnibus, & descripto Cono, uti opus, pro Ellipsi quadrato-quadraticâ, $AK^4 . CK^3$ in KB :: $PE^2 . EQ^2$. vel $AK^4 . CK$ in

in KB^3 :: PE. EQ. Erit primo casu descripta Ellipsis quadrato-quadratica primæ speciei; secundo vero casu descripta Ellipsis quadrato-quadraticâ alterius speciei. Oportet autem, sicuti in Parabolis, ut, cum parameter habet majorem potestatem, quám abscissa, sectio locetur in Curvis hisce ex parte, ex qua unum segmentum lineæ abscissarum basis Coni, vel alterius Circuli paralleli habet minorem potestatem, quàm alterum segmentum, vel simplicem. Contra verò, cum parameter habet minorem potestatem, quàm abscissa, sectio locata sit oportet ea parte, ex qua dictum segmentum habet majorem potestatem, quàm alterum. Id enim colligitur ex dictis, & positis: & ita de ceteris Ellipsibus: & demonstrationes faciles sunt, simili modo instituendæ.

Hinc si Ellipsis Cubica prioris speciei sit in dato Cono describenda datæ parametri EQ. Sint omnia, uti supra [*in Figura* 25.] Et ponatur factum esse quod quæritur. Verùm in AC abscissa ponatur portio AE æqualis notæ lineæ; atque ex E agatur EF parallela CBK. Tum dicantur $AC = a$. $BC = c$. parameter data $= p$. Sinus anguli KAC, quem sinum pro ignota accipio, $= x$. Sinus rectus, seu radius $= d$. Sinus anguli in C $= b$. erit sinus anguli in $K = 2d - b - x$. Cum nota sit, ac data AE, cognitique anguli AEF, EAF ab triangulum per verticem BAC datum Coni dati, habebitur quoque ipsa EF nota, quæ dicatur g. Est KA, ad AC veluti sinus ang. in C, ad sinum anguli in K. Quare $KA = \frac{ab}{2d-b-x}$. Dicatur facilitatis, & brevitatis gratiâ, $2d - b = f$; erit $KA = \frac{ab}{f-x}$. Est etiam

AK.

AK . KC :: Sin. ang. in C. Sin. ang. KAC. Quare $KC = \frac{ax}{f-x}$. & $BK = KC - BC = \frac{ex - fc}{f-x}$, dicta quantitate $a+c=e$. Item est quoque AK. KB :: PE. EF. Igitur $PE = \frac{abg}{ex-fc}$. Modo, ob parametrum, est ex dictis: $\frac{ab^3}{\overline{f-x}^3} . \frac{ax}{f-x}$ in $\frac{\overline{ex-fc}^2}{\overline{f-x}^2}$ :: $\frac{\overline{abg}^2}{\overline{ex-fc}^2} . p^2$. quod est; $\frac{a^3b^3p^2}{\overline{f-x}^3} = \frac{a^3b^2g^2x}{\overline{f-x}^3}$. Quare tandem fiet $x = \frac{bp^2}{g^2}$. Accipiatur hic valor pro sinu anguli KAC, substituta jam loci f, ipsâ $2d-b$; & loco e, ipsâ $a+c$; & in AC ex puncto A ducatur AK in angulo, cujus ille sit sinus, quæ AK occurret BC in K. Tum, abscissâ AE æquali dictæ datæ lineæ, ex E agatur planum secans, ita ut communis sectio EGP cum triangulo per axem Coni sit parallela AK; occurret ea cum latere AB ejusdem trianguli necessario in Cono in aliquo puncto P. Et fiet Sectio Elliptica Cubica prioris speciei, cujus data parameter EQ. Q.F.O. Si efficienda sit Ellipsis Cubica alterius speciei, effectis omnibus, quæ antea, & iisdem positis; erit $\frac{a^3b^3}{\overline{f-x}^3} . \frac{a^2x^2}{\overline{f-x}^2}$ in $\frac{ex-fc}{f-x}$ :: $\frac{abg}{ex-fc} . p$. Quare $xx = \frac{b^2p}{g}$. Et ita de reliquis Ellipsibus est dicendum.

Postremo loco sit describenda in Cono hyperbola Cubica prima cum suo latere recto EH. Sit facta sectio triangularis per verticem ABC. Sit basis Coni cubicus Circulus BDC; & DG ordinata; ac $DG^3 = CG$ in GB^2. Circulus parallelus in Cono sit QML; & MI ejus ordinata; ac $MI^3 = LI$ in IQ^2. Fiat sectio hyperbolica in Cono more consueto. Quare EG linea abscissarum sectionis, & communis sectio plani secantis cum dicto triangulo occurrat lateri trianguli extra Conum in P. Ex A ducta sit AK æquidistans EG secans BG in K. Sit EH recta linea educta ex E normalis; & juncta sit PH. Igitur efficiatur $AK^3 . CK$ in $KB^2 :: PE^2 . EH^2$. Ita tamen ut sectio sit ex parte CG, vel LI ad minorem potestatem eductæ, vel ad simplicem, quàm alterum segmentum in solido CG in $GB^2 = DG^3$; vel in solido LI in $IQ^2 = MI^3$: & erit descriptæ in Cono hyperbolæ parameter EH. Demonstratur eodem modo, ac factum est in Ellipsi; ducta ex I linea IO parallela EH, occurrente PA in O. Quòd si fiat, iisdem positis, $AK^3 . CK^2$ in KB :: EP. EH. & omnia præstentur, uti opus; hyperboles erit Cubica secundæ speciei cum sua parametro EH descripta in Cono. Oportet autem, ut sectio fiat ex parte CG, vel IL ad majorem potestatem eductæ in solido CG^2 in $GB = DG^3$; vel in solido LI^2 in $IQ = MI^3$. Et si fiat [descripto Cono pro hyperbolis quadrato-quadraticis, reliquisque confectis, uti opus]

Fig. 29.

$AK^4 . CK^3$ in KB :: $PE^2 . EH^2$: vel $AK^4 . CK$ in KB^3 :: PE. EH. Erit primo casu descripta hyperboles quadrato - quadratica primæ speciei, secundo verò descripta hyperboles quadrato - quadratica secundæ speciei. Semper autem oportet, sicuti in aliis duabus Curvis; ut, cum parameter habet majorem potestatem, quàm abscissa, sectio locetur in hisce Curvis ex parte, ex qua unum segmentum lineæ abscissarum basis Coni, vel alterius Circuli paralleli habet minorem potestatem, quàm alterum segmentum, vel simplicem. Contra verò; cum parameter habet minorem potestatem, quàm abscissa, sectio locata sit oportet ex parte, ex qua dictum segmentum habet majorem potestatem, quàm alterum. Id enim colligitur ex dictis, & positis: & ita de ceteris Curvis hyperbolicis èst efficiendum: & demonstrationes faciles sunt, simili modo instituendæ.

Manifestum verò est ex dictis quid sit faciendum, si describendæ sint hyperbolæ in Cono dato datæ parametri. Nam, haud secus ac effectum est in Ellipsi, positis omnibus, & manentibus, uti supra in Cono (*eadem Fig. 29.*) atque ipsâ eadem argumentatione instituta, ac in Ellipsi, iisdemque symbolis, seu litteris pro indiciis quantitatum retentis, ductâ quoque ex puncto E lineâ EF parallela CB; sola differentia erit, quòd fiet in hyperbolis $KB = BC - KC$; ubi in Ellipsi (*Fig. 25.*) erat $KB = CK - BC$. Quare erit in hyperbolis $KB = c - \frac{ax}{f-x} = \frac{fc - cx - ax}{f - x}$: sive (accepta $cx + ax = ex$) $= fc - ex$. Et reliqua patent: & fiet $x = \frac{bp^2}{g^2}$. Et noscitur quoque

quid

quid sit præstandum in problemate pro aliis hyperbolis in dato Cono datæ parametri describendis.

Me non monente, jam noscitur; sive etiam adolescentes animadverterent vellem, cum sinus ang. ponitur, aut prodit æqualis quantitati continuæ, sensum esse, de quantitate relata ad numerum, non ad extensionem; seu sinus angulorum esse æquales quantitatibus continuis relative, & secundum proportionem, non absolute, & secundum quantitatem absolutã.

Ita: si x [sin. ang.] $= \frac{bp^2}{g^2}$; & bp^2 sit major quàm g^2; sensus est, tot vicibus x continere unitatem, seu ad illam rationem habere, quot vicibus pb^2 continet quantitatem g^2; sive quanta est ratio $\frac{bp^2}{g^2}$. Si verò g^2 major sit quàm bp^2; sensus est, tot vicibus unitatem relationem habere ad x, quot vicibus habet g^2 ad pb^2 proportionem. Nam si est $\frac{bp^2}{g^2} = x$; erit etiam $\frac{1}{x} = \frac{g^2}{bp^2}$. Numerus spectatur Cubitorum, pedum .... quot est quantitas; non ejus extensio. Ita cum dicitur d sinus rectus, seu radius; sensus est, acceptum sinum rectum fuisse in tot cognitas numero divisum partes, quot d indicare affirmatur. Id semel commonitum sufficiat.

Expositis quæstionibus de descriptione sectionum Conicarum in solido Cono adfinia sunt nonnulla proble-

blemata tractari solita ad ejusmodi descriptiones spectantia; quæ necesse est in nostris quoque sectionibus Conicis contemplari. Data positione linea recta
Fig. 30
FD terminata ad F; & data parametro H, Parabolam primam in plano describere subjecto dato, per solidum Conicum, quæ habeat FD diametrum, F verticem, parametrum H; & ordinatas ad angulum datum; qui primò sit rectus. Dictum est, sectionem in plano describendam esse *per solidum Conicum*. Nam hujusmodi quæstiones & per modos Mecnanicos alius generis, non in solido Cono effectos, & facillime per Geometricas descriptiones confici bene etiam possunt.

Ponatur jam factum esse, quod quæritur. Sit BAC triangulum per axem Coni: BC basis: GE communis sectio hujus plani subjecti generantis jam sectionem quæsitam, cum basi Coni. Profecto GE normalis esse debet ad BC (*VII. Lib. 1. Conicor.*) Sed sunt ordinatæ parallelæ ipsi GE. Ergò angulus GDF rectus. Quare planum datum, & basis Coni duo plana sint oportet recta ad planum trianguli per axem (*19. 11. Elementor.*) Est enim FD etiam in plano, seu triangulo per axem BAC. Et tria sunt hæc plana diversa, atque ita mente sunt intelligenda. Sed et Conus rectus etiam sit oportet (*VII. Lib. 1. Conicor.*)

His positis: ponatur sumpta in latere AB portio FA data, determinataque pro lubitû, $= a$. Et sit sinus anguli ABC trianguli per axem, ignota x. Sinus rectus sit $= d$. parameter H $= p$. Erit triangulum BAC per axem isosceles. Quare erit sinus anguli in A $= 2d - 2x$. Est autem, ob parametrum, $BC^2 . BA$ in $AC :: p . a$. Sive $BC^2 . BA^2 :: p . a$. Sed $BC^2 . BA^2 :: \overline{2d - 2x}^2 . xx$. Igitur fiet post multiplicationem mediorum, & extremorum, postque efformationem æquationis; $xx - \frac{8adx + 4add}{4a - p} = o$. Quæ facillimæ est constructionis æquatio. Componetur autem sic. Inventâ x, invenietur quantitas sinus anguli ABC. Quare, quia FD debet esse parallela AC; idcircoque & triangulum BFD æquicrure, invenietur quoque, inventâ x, sinus anguli BFD in triangulo BFD. Modo ex F in angulo hujus sinûs agatur FB, in qua sit FA $= a$. Ex puncto A agatur AC parallela FD. Et sit quævis AC accepta: ex C agatur in angulo eodem inventi sinus x linea CBD secans FD in D, & FA in B. Triangulo constituto BAC normali ad datum subjectum planum normalis quoque sit Circulus BGC. Et generetur Conus. Et sit GDE perpendicularis ad BC. Et fiat sectio per FD, ita ut communis sectio plani secantis cum BC sit GDE. Et sectio Parabolica efformabitur quæsita, cujus FD axis, F vertex, parameter H. Et in subjecto plano per Conum erit descripta Q. F. O.

Igitur æquatio generalis pro omnibus Parabolis infinitis erit; $p^m . a^m :: \overline{2d - 2x}^{m+n} . x^m x^n$. Sit $m = 1$. $n = 1$. Erit solutum problema in Parabola quadratica. Sit $m = 2$. $n = 1$. Erit solutum in Cubica prima. Si $m = 1$. & $n = 2$. Erit confectum in parabola Cubica alterius speciei. Si $m = 3$. $n = 1$. Erit inventum in Parabola quadrato-quadratica prima. Si $m = 1$. $n = 3$. Erit confectum in Parabola quadrato-quadratica secundæ speciei. Et ita deinceps.

Sed non sit angulus rectus. Hic casus est pro sola Parabola quadratica in descriptione per solidum Co-

Fig. 31. Conicum confecta. Ponatur jam factum esse, quod quæritur; sitque DG diameter data positione terminata ad D; & D vertex ejus. Nunc POQ sit ordinata ad hanc diametrum bisecta in O; ita ut angulus POD sit angulus datus, non rectus; & producatur utrimque DG ad F. Profecto si ex D tangens in D ducta sit sectionis, seu parallela POQ; erit ang. FDC dato æqualis. Supposita modo sit axis sectionis linea CLM; parallela idcirco ipsi DG, & sit vertex L; atque ex L parallela ordinatis supposita sit LEF secans DC in E, & DG in F. Et tangens secet CLM in C; atque ordinetur ex D ad axim linea DM. His positis.

Sinus anguli MDC notus (est enim angulus in M rectus, & ang. in C = angul. FDC dato) sit $= a$. Sinus anguli recti dicatur d. Et sinus dati ang. DCM $= b$. Sit verò DM ignota x. Data autem parameter sit p. erit $CM = \frac{ax}{b}$: & hinc, $ML = \frac{ax}{2b}$; atque $CD = \frac{dx}{b}$; quare $ED = \frac{dx}{2b}$. Verùm est ob parametrum, $\frac{dx}{2b} \,.\, \frac{ax}{2b} :: p \,.\, \frac{2dx}{b}$; igitur $x\ [= DM] = \frac{apb}{2dd}$. Componetur autem sic. Cum esse debeat $DM^2 = ML$ in parametrum axis; erit hæc parameter $= \frac{bbp}{dd}$; si substituatur loco x inventus ejus valor. Fiet vero ipsa $ML = \frac{aap}{4dd}$. Ergo parametro $\frac{bbp}{dd}$, & lineâ LM terminatâ ad L, positâque in inventa distantia DM abs DG [quæ data po-

sitione] & ductâ ipsi DG parallela, vertice verò L, describatur in Cono sectio Parabola Apolloniana in angulo recto, uti antea ostensum: & accipiatur quoque LA datum segmentum lateris trianguli per axem. Hæc Parabola erit illa, quam modo supposuimus, ob distantiam DM, & ob $DM^2 = ML$ in parametrum inventam: quare eam ipsam habebit positionem, & naturam. Et axis erit eadem LM, & idem vertex L. Transibit vero per D, eadem ratione, quia $DM^2 = ML$ in parametrum; vel etiam quia habet tangentem CD in D. Et ejus diameter erit DG positione data: &, ob angulum FDC diametri hujus cum tangente æqualem dato, habebit ordinatim positas in angulo æquali eidem dato: & vertex erit D; & parameter erit data P; & in dato plano per descriptionem Conicam erit descripta. Q. F. O.

Pro Ellipsi. Sit data positione, & magnitudine linea ED terminata ad E; & oporteat Ellipsim in plano subjecto dato describere, cujus diameter, seu latus transversum ED, latus rectum data etiam EP, & angulus ordinatarum rectus. Supponatur jam factum esse, quod quæritur. Et uti supra in Parabola ostensum; Conus erit rectus, quare BAC triangulum per axem isosceles. Item FHG communis sectio plani subjecti cum BLC basi Coni, erit, uti supra in Parabola, normalis ad planum, quod per BAC triangulum per axem: & parameter sit p. Fig. 32.

Supra ED constituatur triangulum datum specie, & magnitudine EAD. Est jam A*K* parallela ED, & occurrens BC diametro basis Coni in *K*. Secet vero ED eandem BC in H. Est quidem GHF, uti diximus, normalis ad BC. Dato triangulo EAD specie, & magnitudine, & triangulo

BAC.

B A C iſoſcele exiſtente, datus eſt ſinus anguli ABK; qui dicatur $= g$; & datus ſinus ang. AKB, qui dicatur $= n$: ſed ſinus ang. BAK etiam datus, ſit $= m$. Nunc dicantur $AD = b$. $AE = a$. $ED = c$. Sinus ang. E D A datus etiam, dicatur $= f$. Et ſinus anguli ACK item notus, dicatur $= e$. Sit vero AC [$=$ A B] ignota x. Erit $BK = \frac{mx}{n}$. $AK = \frac{gx}{n}$. Sed et AB. AK : : E B. E H. Et eſt $AE = x - a$. Quare erit $EH = \frac{gx - ga}{n}$. Et $DH = EH - ED$, erit $= \frac{gx - ga - cn}{n}$. Ponatur, brevitatis, & facilitatis gratiâ, $ga + cn = d^2$. Item eſt C H. H D : : ſinus ang. C D H. Sin. ang. D C H. Igitur erit $CH = \frac{gfx - fd^2}{en}$. Denique C A. C D :: CK. CH. Hinc habebitur $CK = \frac{gfxx - d^2fx}{enx - enb}$. Modo, ob parametrum Ellipſis, eſt $\frac{g^2x^2}{nn} \cdot \frac{mx}{n}$ in $\frac{gfxx - d^2fx}{enx - enb}$: : $c \cdot p$. Quare erit; $\frac{pg^2x^2}{nn} = \frac{cmgfx^3 - cmd^2fxx}{ennx - ennb}$. Et tandem, conſtituta æquatione, fiet $x - \frac{ceg^2b + md^2fc}{peg^2 - mgfp}$ $= o$: ſive, poſita loco d^2 quantitate $ga + cn$, cui

d^2

d^2 ſubſtitutum fuit; erit $x - \frac{ceg^2b + cgamf + c^2nmf}{peg^2 - mgfp} = o$.

Et facile valor x invenietur.

Componetur autem ſic: invento valore x; accipiatur in A D ipſa $AC = x$. Ex A agatur AK parallela E D. Productâ A E, fiat $AB = BC$. Jungatur B C; quæ producta occurrat AK in K. Et E D ſecet jam B C in H. Et fiat ſectio per E D more conſueto ſectionum Ellipticarum, præſtitis quidem omnibus, uti ſupra in Parabola pro hoc problemate in ejus compoſitione. Et fiet ſectio Elliptica quæſita: & cetera patent. Q. F. O. Erit vero æquatio generalis pro omnibus Ellipſibus; ſive pro problemate conficiendo in omnibus Ellipſibus;

$$\frac{\overline{g}\,x^{m+n}}{n^{m+n}} \cdot \frac{\overline{m\,x}^m}{n^m} \text{ in } \frac{\overline{gfxx - d^2fx}^n}{\overline{enx - enb}^n} :: c^m \cdot p^m.$$

Sit $m = 1$. $n = 1$. Erit ſolutum problema in Ellipſi quadratica. Sit $m = 2$. $n = 1$. Erit ſolutum in Ellipſi Cubica prima. Si $m = 1$. $n = 2$. Erit confectum in Ellipſi Cubica alterius ſpeciei. Si $m = 3$. $n = 1$. Erit inventum in Ellipſi quadrato-quadratica prima. Si $m = 1$. $n = 3$. Erit confectum in Ellipſi quadrato-quadratica ſecundæ ſpeciei. Et ita deinceps.

Sit modo angulus datus non rectus. Et hic caſus eſt ſolius Ellipſis quadraticæ. Supponatur jam factum, quod quæritur. Sit MQ data diameter, & M F parameter; quæ inſiſtat ad angulum quemvis ad MQ. Ponatur D E axis ſectionis quæſitæ, & ex M ducta tangens M P occurrens D E in P. Sit M N ordinata ad axim. Sit O centrum: ex D ſit excitata DL parallela ordinatæ MN, ſecans PM in I; & MQ **Fig. 33.**

K pro-

productam in H. Nunc sint $MQ = a$. Sin. ang. PMQ notus, $= g$. Sinus anguli recti $= d$. $MN = x$. Erit sinus anguli MOP $= \frac{2dx}{a}$. Quare sinus anguli MPO $= 2d - g - \frac{2dx}{a}$. Sive, effecta $2d - g = b$; erit $= \frac{ba - 2dx}{a}$. Est vero MO. OP :: Sin. ang. in P. Sin. ang. PMQ. Quare OP $= \frac{aag}{2ba - 4dx}$.

Nunc sin. ang. PMN $= \frac{2da - da - ba + 2dx}{a} = \frac{da - ba + 2dx}{a}$. Quare sinus ang. NMO $= \frac{ga - da + ba - 2dx}{a} = g - d + 2d - g - \frac{2dx}{a} = \frac{ad - 2dx}{a}$. Ergo, quia MO. ON :: Sin. ang. recti. Sin. ang. NMO; erit ON $= \frac{ad - 2dx}{2d} = \frac{a - 2x}{2}$.

Verùm est PO. OD :: OD. ON. Quare $OD^2 = \frac{aag}{2ba - 4dx}$ in $\frac{\overline{a - 2x}}{2} = \frac{aag}{ba - 2dx}$ in $\overline{a - 2x}$.

In triangulo IMH, ang. IMH est ang. datus (hypoth.) cujus sinus dicatur b. Anguli vero IHM æqualis NMO sinus est quidem $\frac{ad - 2dx}{a}$. Est autem MP. MN :: Sin. ang. recti ad sinum ang. in P.

Qua-

Quare erit MP $= \frac{adx}{ba - dx}$. Modo ob parametrum MF, quæ data dicatur p; habetur MF. 2MP :: MI. IH :: Sin. ang. in H. Sin. ang. IMH. Quare erit $p. \frac{2adx}{ba - 2dx} :: \frac{ad - 2dx}{a}. b$. Sive $xx - \frac{ax}{2} - \frac{pbx}{2d} + \frac{pbba}{4dd} = 0$. Componetur autem sic. Invento valore x [MN] determinabitur axis DE per effectam analysim. Determinabitur, noscetur que quoque ON; quare & noscetur valor DN; atque NE. Hinc determinata fiet parameter ipsius axis DE; quæ parameter est quarta proportionalis ad DN in NE, ad MN^2, & ad DE. Modo axi, seu latere transverso DE, ordinatis in ang. recto, vertice D, positione verò DE in distantia MN à dato puncto M, & angulum efficiente MND rectum, describatur in Cono Ellipsis, uti antea ostensum. Pertransibit ea per M ob $MN^2 = \frac{\text{parametro in DN, \& NE ductæ}}{DE}$; sive ob tangentem PM.

Pertransibit quoque per Q ob MO = OQ; & O centrum. Atque habebit MQ diametrum, & ordinatas in angulo dato, & datam MF parametrum hujus diametri; & in plano dato subjecto per Conum erit descripta. Q. F. O.

Sit postremo loco describenda in Cono hyperboles EF, cujus latus transversum datum DE, parameter EP data; & angulus ordinatarum rectus. Supponatur jam factum esse quod quæritur: sint omnia uti supra in Ellipsi, & Parabola, quod ad Conum Fig. 34.

spectat.

ſpectat. Modo ſupra ED conſtituatur eodem modo, ac in Ellipſi, triangulum EDA magnitudine, & ſpecie datum. Et ſecet EH in H latus BC trianguli ABC per axem Coni. Sit ducta ex A vertice hujus trianguli parallela AK ipſi DE, ſecans BC in K, & dicantur $AE = a$; $AD = b$. $DE = c$. Et ſinus angulorum reſpondentium angulis, qui in Ellipſi, ſunt etiam dati, uti in Ellipſi; & dicantur eodem modo, quo in Ellipſi: & ED latus tranſverſum datum dicatur b; & latus rectum datum dicatur p; & omnia uti in Ellipſi: & erit $CK = BC - KB = \frac{d^2 fx - gfxx}{exn - enb}$. Et cetera patent uti in Ellipſi; & eadem æquatio fiet; eademque compoſitio. Et æquatio quoque generalis eodem modo conſtituetur pro omnibus hyperbolis Q. F. O.

Fig 35. Si vero angulus non ſit rectus; fiant omnia plane uti in Ellipſi: & confectum erit problema: & hic caſus eſt ſolius hyperbolæ quadraticæ.

Advertendum eſt, quòd in ſupra pertractato problemate de deſcribendis Parabolis quibusvis datæ parametri in Cono dato (*pag.* 18. & 19.) nil immutatur natura problematis in Parabola data tùm generis, quùm ſpeciei, ſi quo libet magis modo Solidum, quod eſt in ſecundo termino proportionis, componatur. Ita idem eſt, ſi (vide quæ ibi) pro Parabola Cubica prima ſit quadratum AF quarta proportionalis ad BC^3, ad BA in AC^2, & ad HF^2; vel ſi ſit quarta proportionalis ad FC^3, ad BA^2 in AC, & ad HF^2. Itemque Pro Parabola Cubica ſecunda idem erit, ſi vel ſit AF quarta proportionalis eodem modo ad BC^3, ad BA in AC^2, & ad HF; vel ſit quarta proportionalis ad BC^3, ad BA^2 in AC, & ad HF. Sed & idem etiam erit pro Parabola quadrato - quadratica prima, ſi Cubus ex AF fiat vel quarta proportionalis ad BC^4, ad BA in AC^3, & ad HF; vel quarta proportionalis ad BC^4, ad BA^3 in AC, & ad HF: & etiam ſi quarta ſit proportionalis ad BC^4, ad BA^2 in AC^2, & ad HF. Idemque de reliquis Parabolis; modo tamen ſemper ſit non ſolum idem genus, ſed etiam eadem ſpecies Curvæ; eſt dicendum. Idcircoque nos ibidem modo unum Solidum, modo alterum in ſecundo illo termino collocavimus.

Sed diverſa ratione res ſe habet in Ellipſibus, & conſequenter in hyperbolis, dum de eodem agitur problemate. Nam ſi conſtitutio illa ſolidi in ſecundo termino poſiti immutetur, non immutabitur profectò Curvæ natura; ſed poterit aliquando natura immutari problematis, uti calculo invenivimus. Et quidem pro Ellipſi Cubica prioris ſpeciei deſcribenda in dato Cono cum data parametro, problema ſupra fuit [*pag.* 63. & 64.] ſimplicis dimenſionis; & Solidum illud (vide quæ ibi) in ſecundo termino locatum erat KC in BK^2. Sed ſint omnia uti ibidem, & immutetur Solidum, ac fiat KC^2 in BK; problema erit duarum dimenſionum: Nam, præſtitis omnibus, quæ ibi oſtenſa ſunt; verùm in ſecundo termino proportionis locato Solido KC^2 in BK; erit $x^2 b^2 g^2 a^4 = a^3 b^3 p^2 ex - a^3 b^3 p^2 fc$. Sive, ſubſtituta loco e, ipſa

quan-

quantitate $a+c$; & loco f, ipsa $2d-b$; fiet $xx = \frac{bp^2x}{g^2} + \frac{bp^2cx}{ag^2} - \frac{2bp^2dc + b^2p^2c}{ag^2}$. Sed idem problema pro Parabola Cubica secunda positum ibi habuit Solidum dictum hocce KC^2 in BK. Et problema fuit duarum dimensionum. Immutetur Solidum, & fiat KC in BK^2 & problema quoque erit duarum dimensionum. Nam fiet $a^3\ b^3\ p = a^2\ ebgxx - fca^2bgx$. Et substituantur loco e ipsa $a+c$, atque loco f ipsa $2d-b$. Et cetera patent.

Fig. 36. Immo primus casus problematis, nimirum pro Parabola Cubica prima, cum possit alio modo confici, id ipsum etiam manifesto demonstrat. Quandoquidem loco acceptæ ignotæ sinûs anguli KAC x; quod ibi (eodem loco) effectum fuit; accipiatur pro ignota x linea AK. Et sint sin. ang. recti d; & AC $= a$. BC $= c$. Sin. ang. in C $= b$. Et EF $= g$. Sit verò data parameter p. Atque instituatur analysis Algebrica per sinus, & latera in triangulo KAC, ubi notus sinus ang. in C; notum latus AC; est vero denominatum latus AK. Et invenietur valor x, obtenta æquatione. Unde, quia tùm noscetur sinus ang. KAC; in eo angulo ducenda est AK secans in K lineam BC basis; atque parallelè AK sectio per E est efficienda. Et erit (dicta $2d-b = e$) KC $= \frac{ex-ab}{b}$. Et KB [facta $ab+bc = f^2$] $= \frac{ex-f^2}{b}$. Et PE $= \frac{bgx}{ex-f^2}$. Quare si fiat Solidum dictum, uti ibi compositum fuit, KC in KB^2; æquatio tandem erit, $x = \frac{ag^2\ b}{ag^2 - bp^2}$;

simplicis omnino dimensionis eodem prorsus modo, veluti ibi fuit inventa, juxta aliam solutionem, in qua tamen Solidum eodem modo constituebatur. Si vero dictum Solidum immutetur, fiatque KC^2 in BK; æquatio tandem prodibit duarum dimensionum $x^3 = \frac{\overline{ex-b}^2 a \text{ in } b^2\ g^2\ x^2}{b^3\ p^2\ ex - b^3\ p^2\ f^2}$; eodem prorsus pacto, veluti hic supra modo juxta aliam solutionem, æquatio fuit duarum dimensionum; in qua Solidum illud eadem ratione erat compositum. Ergo varii sunt casus problematis pro Ellipsibus, & idcirco pro hyperbolis, singillatìm pertentandi.

Manifestum est etiam, descriptiones nostrarum Curvarum infinitè productarum nuper supra in Cono præbitas cum sua parametro, de quibus agere cœpimus à pag. 55. nil immutari, & easdem manere, sive hoc idem solidum, de quo modo diximus, in secundo termino positum uno modo sit constitutum, sive sit alio, in una, eademque specie; non modo genere, Curvæ; sola cautio conditionis ibi adpositæ adhibenda est de collocatione, seu situ plani secantis Curvam generaturi.

Hæc omnia spectant ad descriptiones Conicarum Sectionum infinitè productarum per Conos varii generis efformatas; quæ quidem organica descriptio est juxta ea, quæ dicta sunt initio capitis quarti. Nunc modus est subnectendus, quo eæ Geometricâ descriptione in plano possint delineari: & a Parabolis quidem exordiemur. Sit AB linea accepta pro diametro omnium Parabolarum (communem enim descriptionem præbemus omnibus parabolis, eadem operandi ratione, & uno eodemque ordine) ac sit AC

latus

latus rectum ad quemlibet angulum cum AB, ſive ad angulum, qui magis optatur ab ordinatis fieri ſupra diametrum. Sumatur in AB abſciſſa AM; atque inter parametrum, ſive latus rectum, & abſciſſam AM inveniantur tot mediæ proportionales, quot indicat genus parabolarum, quæ deſcribi debent; nimirum, una, ſi Parabola ſit primi generis; duæ ſi ſint Parabolæ ſecundæ generis; tres ſi ſint Parabolæ tertii generis; atque ita deinceps: tum adplicentur omnes hæ mediæ proportionales ordine ipſi abſciſſæ AM; quæque ſint parallelæ AC. Et harum proportionalium extremitates præſtabunt puncta, quæ in ſingulis erunt ſpeciebus illius generis Parabolæ: modo etiam eæ comprehendantur ſpecies, quæ radicum extractione ad alias inferioris generis deprimuntur. Ita enim unumquodque genus tot ſpecies plane continebit, quot mediæ ſunt proportionales.

Fig. 37.

Si Parabola primi generis ſit deſcribenda inveniatur inter AC, & AM una media proportionalis; quæ ſit MN; erit N in Parabola quæſita. Continueturque inventio puncti N eadem ratione. Quoniam ſit $AC = a$. $AM = x$. $MN = y$. Erit jam $yy = ax$. Quæ illa eſt Parabola. Si Parabola ſecundi generis: Inveniantur inter AM, & MN duæ mediæ proportionales; quod ſi MN ſit prima earum erit N in Cubica Parabola prioris ſpeciei; Si vero ſit ſecunda ex duabus mediis proportionalibus; erit punctum N in Cubica ſecundæ ſpeciei. Quoniam, retenta eadem denominatione, erunt primo caſu continue proportionales $a \,.\, y \,.\, \frac{y^2}{a} \,.\, x$. Unde $y^3 = aax$. Quæ prima eſt Cubica. Secundo caſu fient continue proportionales $a \,.\, \frac{y^2}{x} \,.\, y \,.\, x$. Unde erit $y^3 = axx$. Quæ eſt ſecunda Parabola Cubica.

Ea-

Eadem ratione ſi Parabolæ deſcribendæ ſint tertii generis, inveniendæ ſunt tres mediæ proportionales inter AC, & AM. Et ſi MN ſit prima harum trium, erit punctum N in quadrado — quadratica prima; nam tum erunt in continua proportione quantitates, $a \,.\, y \,.\, \frac{y^2}{a} \,.\, \frac{y^3}{aa} \,.\, x$. Unde $y^4 = a^3 x$. Quæ eſt prima quadrato — quadratica. Si verò ipſa MN fuerit ſecunda trium mediarum proportionalium; erit punctum N in ea Parabola tertii generis, quæ per extractionem radicis deprimitur ad Apollonianam. Etenim, ob proprietatem progreſſionis Geometricæ bene Geometris notam, quia extremæ AC, AM eo caſu æqualiter diſtant ab ipſa MN, erit tum uti a ad y, ita y ad x; idcircoque $y^2 = ax$. Denique ſi eadem MN fuerit tertia trium mediarum proportionalium; quia tum habetur continua proportio $a \,.\, \frac{y^3}{xx} \,.\, \frac{y^2}{x} \,.\, y \,.\, x$; prodibit $y^4 = ax^3$, Parabolæ quadrato — quadraticæ alterius ſpeciei æquatio.

Fig. 38.

Sint nunc deſcribendæ infinitæ Ellipſes. Sit AB latus ipſarum tranſverſum, & AC latus rectum ſupra AB ad angulum exoptatum abſciſſarum. Modo jungatur BC; & accepta in AB abſciſsâ quavis AM, ducatur ex M recta MO parallela AC, atque occurrens in O rectæ BC. Dein inter MO, & abſciſſam AM inveniantur tot mediæ proportionales, quot indicat Ellipſis deſcribenda. Ac tum, haud ſecus ac in Parabolis, adplicentur omnes hæ mediæ proportionales ordine ipſi abſciſſæ AM. Profecto

extre-

extremitates earum dabunt puncta, quæ erunt in singulis speciebus ejus generis; cum hic etiam species eæ comprehendantur, quæ extractione radicum ad alias inferioris generis deprimuntur.

Nam, posito latere recto AC $= a$; latere transverso AB $= b$; & abscissâ AM dicta x; ordinatâ verô MN dicta y; erit reliqua portio BM $= b - x$. Unde, cum invenienda sit una media proportionalis juxta hanc methodum inter MO, & AM, & sit ea ipsa MN; & cum propter similia triang. BMO, BAC sit MO $= a - \frac{ax}{b}$; erit profecto $a - \frac{ax}{b} . y :: y . x$. Quare $y^2 = ax - \frac{axx}{b}$. Quæ est primæ Ellipsis æquatio. Si vero describendæ sint Ellipses secundi generis, inveniantur inter MO, & MN duæ mediæ proportionales. Si MN fuerit earum prima, erit punctum N in Ellipsi Cubica prioris speciei; namtum proportionales erunt quantitates quatuor, $a - \frac{ax}{b} . y . \frac{yy}{a - \frac{ax}{b}} . x$. Et idcirco erit $y^3 = aax - \frac{2aaxx}{b} + \frac{aax^3}{bb}$. Quæ est æquatio illius Ellipsis. Si vero MN fit secunda ex duabus mediis proportionalibus, idem punctum N in erit in Ellipsi Cubica alterius speciei; nam eo casu erunt continuè proportionales $a - \frac{ax}{b} . \frac{yy}{x} . y . x$. Unde æquatio promanat ad Ellipsim Cubicam alterius speciei $y^3 = axx - \frac{ax^3}{b}$. Hæ vero Ellipses migrabunt in Circulos infinitos, si angulo BAC recto, ponatur latus rectum AC æquale transverso AB. Nam tum erit MO $=$ BM; & rectæ proportionales mediæ inter MO, & AM eædem erunt, quæ mediæ proportionales inter portiones BM, & AM. Et punctum N erit in Circulo primi generis, si uti in Ellipsi, perpendicularis MN sit media inter portiones BM, AM: etenim, dictis AB $= a$. AM $= x$. MN $= y$; erit BM $= a - x$. Hinc $a - x . y :: y . x$. Et $y^2 = ax - xx$. Qui primus est Circulus. Quod si normalis MN prima sit ex duabus mediis dictis inter BM, AM; erit N in Circulo Cubico prioris speciei. Quod si fuerit secunda, erit in Cubico Circulo secundæ speciei. Et ita de reliquis Circulis.

Proponantur denique describendæ infinitæ Hyperbolæ. Sit AB latus transversum; & AC rectum, seu parameter supra AB in angulo optato ordinatarum supra abscissas. Jungatur BC. Et in AB producta versus A accipiatur quævis AM. Ex M agatur MO parallela AC conveniens cum BC in O. Modo inveniantur inter MO, & AM tot mediæ proportionales, quot indicat genus hyperbolarum describendarum. Nimirum una media, si describenda sit hyperboles communis. Nam tum, dictis AC $= a$. AB $= b$. AM x. MN ordinata $= y$; erit profecto BM $= b + x$. Ergo MO $= a + \frac{ax}{b}$. Quare si MN una media proportionalis inter MO, & AM; fiet $a + \frac{ax}{b} . y :: y . x$. Et erit $yy = ax + \frac{axx}{b}$. Quæ vulgaris est hyperboles. Dein duæ mediæ inter MO, & AM inveniendæ sunt; quarum, si prima MN, erit N in hyperbola Cubica prioris speciei; si vero secunda, erit N in hyperbola Cubica secundæ speciei. Fig. 39.

speciei. Etenim proportio primo casu erit continua, $a + \frac{ax}{b}$, y, $\frac{yy}{a+x}$, x. Secundo vero casu proportio continua erit $a + \frac{ax}{b}$, $\frac{yy}{x}$, y, x. Et inde primo casu prodibit hyperboles Cubica prima $y^3 = aax + \frac{2aaxx}{b} + \frac{aax^3}{b^2}$. In secundo vero casu prodibit hyperboles Cubica secunda $y^3 = axx + \frac{ax^3}{b}$. Et ita de reliquis.

Inventio harum mediarum proportionalium comparatur quidem sine Curva quæsita, quam per eas jussimus describi. Nam duæ mediæ proportionales, quæ describunt Cubicas, seu Curvas secundi generis, vel Lineas tertii ordinis, obtinentur probe per intersectionem duarum Curvarum primi generis: & supra id effectum fuit *pag.* 59. & 60. Atque tres mediæ proportionales, quæ describunt Curvas tertii generis, inveniuntur quidem per intersectionem duarum Curvarum secundi generis. Quod exploratissimum est per recentes Geometriæ analyticas methodos; & ita de reliquis. Item jam tradidimus rationem describendi in Cono infinitas has Curvas. Eæ in Cono descriptæ præbebunt medias quæsitas, quæ adhiberi debent in descriptionem Curvæ Geometricam in plano; de qua modo agimus.

Modus nunc a nobis præbebitur describendi hujusmodi Curvas infinitas organice; qui simplicior videtur antecedentibus, generalis quidem; & ad praxim facile accomodatur.

Sit

Sit Regula quædam recta AB, quæ erit diameter, seu linea abscissarum omnium Parabolarum. Insistat illi AC in angulo ordinatim positarum quolibet. Nunc sint Parabolæ relatæ ad omnes priores species omnium generum; idest Parabolæ, in quibus potestas abscissæ est semper simplex, seu uti dicunt eam, Linearis. Agatur per C alia recta regula CD parallela AB. Modo portiones lineæ AC relationem habentes cum portionibus acceptis in CD determinabunt Curvæ naturam. Etenim, si abscindatur in CD portio CF æqualis abscissæ alteri portioni AF in AC; junctis filo aliquo punctis A, F; & ex E ducta linea EG parallela AB, occurrente cum AF in N; erit punctum N in Parapola primi generis. Quod si regula, seu filum AF ita semper circa A irrotetur insistens supra CD, ut eodem tempore, commotâ EG sibi parallelâ, seu parallelâ AB, fiant semper portiones AF, CF æquales; erit dicta Parabola per hanc continuationem descripta. Atque ejusmodi descriptio organica semper in insequentibus retineatur]. Nam sit $AC = a$, $AM = EN = x$. $MN = AE = y = CF$. Sunt verò similia triangula AEN, ACF. Igitur erit, $y . x :: a . y$. Sive $y^2 = ax$. Quæ est dicta Parabola. Fig. 40.

Sed sit eadem CF tertia proportionalis in ordine duarum AC, AE. Erit ea $= \frac{yy}{a}$. Igitur propter similia dicta triangula, quia $y . x :: x . \frac{yy}{a}$; habebitur $y^3 = a^2 x$. Quæ est Parabola Cubica prioris speciei. Quod si eadem CF statuatur quarta proportionalis in ordine duarum AC, AE; erit CF

quidem

quidem $= \frac{y^3}{a^2}$. Et inde æquatio fiet eadem ratione uti ſupra; $y^4 = a^3 x$. Quæ eſt Parabola quadrato — quadratica prioris ſpeciei; atque ita deinceps; ſi CF ſtatuatur quinta, ſexta, ſeptima & ſic infinitè proportionalis in ordine linearum AC; AE; punctum N erit ſemper in omnibus primis ſpeciebus aliorum generum Parabolarum.

Quod ſi ſpecies poſtremæ Parabolarum ſint deſcribendæ omnium generum, in quibus poteſtas non abſciſſæ, ſed lateris recti eſt linearis; ſint in rectis CD, & AC quamtumvis productâ portiones CF, AE; ita ut AE ſit æqualis CF; & fiant quæ ſupra, ductâ EG parallelâ AB; erit punctum N in Parabola primi generis; ſi verò AE, fuerit tertia proportionalis poſt latus rectum AC, & portionem CF, erit N in Cubica alterius ſpeciei; ſi fuerit AE quarta proportionalis poſt AC, & CF; erit N in Parabola quadrato — quadratica alterius ſpeciei. Et ita de reliquis Parabolis poſtremarum ſpecierum. Si AE fuerit quinta, ſexta, ſeptima proportionalis poſt AC, CF. Etenim, effectis omnibus uti ſupra; & retentâ eadem denominatione; cum ſimilia ſint triangula ACF, AEN; erit primo caſu $y . x :: a . y$. Quare $ax = y^2$; ſecundo caſu; quia habebitur tum CF media proportionalis inter AC, & AE $= \sqrt{ay}$; fiet $y . x :: a . \sqrt{ay}$. Et idcirco $y^3 = axx$; Parabola Cubica alterius ſpeciei; tertio caſu; quia CF erit prior duarum mediarum proportionalium inter AC, & AE; idcircoque $= \sqrt[3]{aay}$; fiet proportio $y . x :: a \sqrt[3]{aay}$. Et $y^4 = a x^3$. Quæ eſt Parabola quadrato — quadratica alterius ſpeciei.

Denique ſi deſcribendæ ſint Parabolæ ſpecierum intermediarum inter primas, & poſtremas; tum hac ratione aliquo pacto diverſa eſt procedendum. Primò ponendæ ſunt deſcriptæ Parabolæ primarum ſpecierum, ac dein in ordine lateris recti AC [*Fig. eadem*] & cujuslibet ordinatæ ipſarum Parabolarum inveniendæ ſunt proportionales tertia, quarta, quinta, ſexta atque ita deinceps. Hæ vero inventæ proportionales adplicentur eidem abſciſſæ ordine; & dabunt ordine ſpecies omnes alias intermedias. Sic quæratur ſpecies intermedia prima inter primam, & poſtremam ſpeciem Parabolæ quadrato — quadraticæ. Cubicæ Parabolæ non habent ſpecies intermedias inter primam, & poſtremam jam enunciatam. Deſcripta ponatur Parabola quadrato — quadratica prioris ſpeciei $y^4 = aaax$. Sit ea AND. cujus abſciſſa Fig 41.
AM, & ejus ordinata MN. Igitur habetur jam, noſciturque ordinata MN juxta priorem methodum has Curvas deſcribendi ſupra expoſitam. Nam MN prior eſt ex tribus mediis proportionalibus inter latus rectum AC, & abſciſſam AM determinatam jam, & notam. Quare inveniatur tertia proportionalis in ordine AC, & MN. Et ſit MO. Erit O in Curva quadrato — quadratica Parabolica intermediæ ſpeciei. Etenim eſt MN $(= y) = \sqrt[4]{aaax}$. Cum jam ſit $y^4 = a^3 x$. Et eſt x jam cognita. Ergo, ſi in ordine lateris recti AC, & ordinatæ MN inventa eſt tertia proportionalis pro Parabola qua-

quadrato — quadratica speciei mediæ, uti nuper diximus; dictâ hac tertiâ proportionali z, habebitur $a . \sqrt[4]{aaax} :: \sqrt[4]{aaax} . z$. Ergo erit $a^4 z^4 = a^6 xx$. Sive $z^4 = a^2 \; x^2$. Quæ species intermedia est quæsita; quæque vero reducenda est ad $z^2 = ax$; uti non semel est ostensum. Et ita de reliquarum Parabolarum intermediis speciebus. Et adverte, esse $\sqrt[4]{aaax}$ majorem hìc quàm $\sqrt[2]{ax}$. Nam in nostro casu x (A M) est semper eadem quantitas. Sed $\sqrt[4]{aaa}$ est $a^{\frac{3}{4}}$. Et $\sqrt[2]{a}$ est $a^{\frac{1}{2}}$. Ergo illa major est istâ.

Fig. 42. 43.

De Ellipsibus, & de hyperbolis eodem modo organico describendis dicemus. Et sit, ut in antecedenti pro ipsarum latere transverso recta AB, pro latere recto, seu parametro linea recta AC. Compleaturque in Ellipsibus parallelogrammum AD; cujus latera AC, CD producantur si opus. In hyperbolis verô; productâ AB in directum versùs A, agatur ei parallela ex C puncto linea CD. Et, siquidem eæ Ellipses, sive hyperbolæ sint describendæ, quæ ad primas species referuntur, ratio AF abscissæ in AC ad CF sumptam in CD determinabit Curvæ speciem descriptam. Siquidem si æquales eæ erunt, junctis AF, BE; punctum intersectionis earum N erit in Ellipsi, vel hyperbola primi generis; & ita de reliquis punctis. Nam ducta ex N puncto ordinatim positâ NM, seu parallelâ ductâ NM ipsi

ipsi AC; si sint AC $= a$, AB $= b$, abscissa AM $= x$; & ordinata MN $= y$; quare est AM $= b - x$ in Ellipsi; & $= b + x$ in hyperbole; reperietur, propter similia triangula BMN, BAE, ipsa AE $= \frac{by}{b \pm x} =$ CE. Igitur, cum similia quoque sint triangula NMA, ACF; fiet $y . x :: a . \frac{by}{b \pm x}$.

Et consequenter habebimus æquationem $ax = \frac{byy}{b \pm x}$.

Sive $yy = ax \pm \frac{axx}{b}$. Quæ prima est Ellipsis, vel hyperboles Apolloniana. Sed si portio CF fuerit tertia proportionalis in ordine lateris recti AC, & portionis AE; invenietur ipsa CF $= \frac{bbyy}{abb \pm 2abx + ax^2}$; idcircoque, propter eandem proportionem, quæ oritur ex similitudine triang. NMA, ACF; erit, facta multiplicatione mediorum, & extremorum, institutaque æquatione; $y^3 = aax \pm \frac{2aaxx}{b} + \frac{aax^3}{bb}$; quæ est Ellipsis, vel hyperboles Cubica prioris speciei. Et si eadem portio CF fuerit quarta proportionalis in ordine earumdem AC, AE; eadem ratione demonstrabitur punctum N esse in Ellipsi, vel hyperbole quadrato — quadratica prioris speciei;

$$y^4 = a^3 \; x \pm \frac{3a^3 \; xx}{b} + \frac{3a^3 \; x^3}{bb} \pm \frac{a^3 \; x^4}{bbb}.$$

Atque ita deinceps.

Contraria ratione, ſiquidem, effectis omnibus uti antea, fuerit jam iterum portio A E æqualis CF; deſcribetur ſemper prima Ellipſis, vel hyperboles Apolloniana; ſed vero ſi AE fuerit tertia proportionalis in ordine A C lateris recti, & portionis C F; erit punctum N in Cubica Ellipſi, vel hyperbole alterius, ſeu ſecundæ ſpeciei. Eritque in poſtremis omnibus ſpeciebus, ſi A E fuerit in ordine lateris recti A C, & portionis C F tertia, quarta, quinta, ſexta proportionalis; & ita deinceps. Quandoquidem, retentis iiſdem indiciis; fiet quoque B M $= b \pm x$. Et A E, propter ſimilia triangula B M N, B A E, erit quoque $= \frac{by}{b \pm x}$. Igitur in caſu æqualitatis A C, C F, erit B F $= \frac{by}{a \pm x}$. Sed ſimilia ſunt triangula M A N, C F A; ergo $y . x :: a . \frac{by}{b \pm x}$. Et $ax = \frac{byy}{b \pm x}$. Sive $yy = ax \pm \frac{axx}{b}$. Quæ eſt Ellipſis, ſive hyperboles prima Apolloniana. Sed ſi AE fuerit tertia proportionalis in ordine AC, & CF; quia tum C F fiet, quippe media inter AC, & AE proportionalis, $= \sqrt{\frac{aby}{b \pm x}}$; erit, propter eandem ſimilitudinem triangulorum expreſſam in terminis, ſeu indiciis quantitatum, & facta æquatione producti mediorum cum producto extremorum,

$ax = \sqrt{\frac{abyyy}{b \pm x}}$. Sive $y^3 = axx \pm \frac{ax^3}{b}$. Quæ eſt Ellipſis, ſive hyperboles Cubica alterius ſpeciei. Erit autem Ellipſis, ſeu hyperboles quadrato — quadratica alterius ſpeciei; ſi A E ſtatuatur quarta proportionalis in ordine earumdemmet linearum AC, CF. Nam erit tum C F, quippe prima ex duabus mediis proportionalibus inter AC, & AE, $= \sqrt[3]{\frac{aaby}{b \pm x}}$. Et inde per modo dicta; fiet quoque $ax = \sqrt[3]{\frac{aaby^4}{b \pm x}}$. Et hinc $y^4 = ax^3 \pm \frac{ax^4}{b}$. Quæ eſt quadrato — quadratica Ellipſis, ſeu hyperboles alterius ſpeciei. Et ita de reliquis.

Quod ſi deſcriptæ expoſcantur hac eadem methodo Ellipſes, & hyperbolæ ſpecierum intermediarum. Tum ponantur primo deſcriptæ Ellipſes, ſeu hyperbolæ primarum ſpecierum. Dein ſumatur linea recta, quæ ſit quarta proportionalis in ordine lateris transverſi, lateris recti, & ejuſdem lateris tranſverſi abſciſsâ aliquâ imminuti in Ellipſibus, ſed aucti in hyperbolis; ac poſthac inveniantur in ordine hujuſce rectæ lineæ, & ordinatæ Ellipſis, vel hyperbolis, quæ ordinata illi convenit abſciſſæ, proportionales tertia, quarta, & ita deinceps; & erit factum, quod quærebatur. Ita ſi poſcitur ſpecies intermedia prima Ellipſis, vel hyperbolæ quadrato — quadraticæ; eſt quarta proportionalis dicta in ordine lateris tran-

transversi, lateris recti, & ejusdem lateris transversi imminuti, vel adaucti abscissâ, $= \frac{ab \mp ax}{b}$ pro Ellipsibus, & hyperbolis. Modo, si efficiatur uti hæc quantitas ad radicem quadrato — quadratam ordinatæ Ellipsis, vel hyperbolis quadrato — quadraticæ prioris speciei, quæ est

$$\sqrt[4]{a^3 x \pm \frac{3a^3xx}{b} + \frac{3a^3x^3}{bb} \pm \frac{a^3x^4}{bbb}}$$

uti supra; ita hæc eadem radix quadrato — quadratica ad quartam, quæ dicatur z; & efformetur postrema æquatio, invenietur species intermedia Ellipsis, vel hyperbolis quæsita; quæ tamen ad communem Ellipsim, vel hyperbolem reducetur: & ita de reliquis. Q. F. O.

De Circulis vero infinitis hac ratione describendis nil est adiiciendum. Nam, quæ de Ellipsibus dicta sunt, locum in Circulis habent omni ex parte; modò latus rectum exæquet latus transversum, & angulus sub ipsis comprehensus, seu ordinatarum sit rectus.

Profecto, uti cernitur, hæc via modo tradita describendi Curvas hasce aliud non exposcit, quàm progressionem proportionis Geometricæ, cujus duo priores termini innotescunt; quo nil facilius, atque simplicius videtur esse in Geometria. Quare hac parte etiam, non modo quia est Mechanica descriptio, præferenda longe hæc est rationi priori easdemmet Curvas describendi: juxta quam mediæ proportionales, non progressio continua proportionalium, sunt adinveniendæ.

CAPUT

CAPUT V.

De Cissoide Dioclis, & Conchoide Nicomedis; ac de ratione extendendi eas in infinitum.

IN explicanda natura Conicarum Sectionum, earumdemque in infinitum processu ostendendo longiores fortasse paullò fuimus, quàm ut operis ratio exposcere visa foret. Et quidem illarum omnium Curvarum non modo propriam naturam, & præstantiores proprietates expositione complexi sumus; verùm etiam generationem earum ex Coni Sectionibus; tùm Geometricam in plano descriptionem, atque aliam descriptionem organicam ministravimus: nonnullaque problemata confecimus ad ipsasmet Sectiones Conicas spectantia non infimæ notæ. Profecto cum de sectionibus Conicis in Geometria agitur; de magna re agitur. Tum quia Mathematica inventa, & Theoremata, & problemata multam partem in illis, veluti in fundamento, ac fulcimine insistunt; & disciplinæ ceteræ Mathematicæ illis egent, ex illis profluunt, in illis innituntur; quùm etiam quoniam nova promota Geometria, novæque illius methodi Inveniendi plurimùm in Sectionibus Conicis, & ob Sectiones etiam Conicas procul dubio valent. Sed aliarum Curvarum brevior, constrictiorque erit pertractatio. Etenim, etsi Conicas Sectiones eæ longe numero superent; atque, etsi nullam ex iis cognitu dignam præterire nobis animus sit, ac propositum; tamen in earum natura, & proprietatibus prosequendis tanta non videtur nobis dissertatione opus esse, quanta in Sectioctionibus Conicis exponendis uti profecto, ficuti diximus, debebamus.

Primo loco obviæ nobis fiunt Ciſſoides Dioclis, & Conchoides Nicomedis. Utraque Curva à ſuis auctoribus eum in finem excogitata fuit, ut magno apud Veteres problemate de duabus mediis proportionalibus inveniendis fieri poſſet ſatis. Nam, licet idipſum problema a Veteribus ſolutum bene fuerit, uti inferiùs oſtendemus, per Conicas Curvas mutuò interſectas; tamen, quia tunc temporis valde operoſum judicabatur, quod initio præfati ſumus, Coni Sectiones in plano deſcribere; eam ſolutionem non tanti fecerunt Veteres ipſi, ut ad alias ſolutiones excogitandas, inque vulgus edendas animum non adplicuerint. Plerique illorum problematis conſtructionem inſtrumentis tantùm perfecerunt; ut ad praxim ſolutio facilius duceretur: cujuſmodi fuere conſtructiones Eratoſthenis, Heronis, Philonis. Quidam verò, ut res Geometrico modo magis perageretur (qua de cauſſa equidem ignoro: quid enim magis Geometricum, ideſt quod quantitatem, ſive extenſionem contineat, quàm Mechanica operatio; modo Geometriæ legibus adſtricta?) Curvas alias excogitarunt ad id operis plane accomodatas. Quæ certe facile deſcribuntur, & idcirco videntur faciliùs conficere problema. Hanc viam præ aliis Diocles, & Nicomedes tenuere; quando ille Ciſſoidem, Conchoidem iſte commenti ſunt.

Fig.44 Ciſſoidis generatio in hunc modum eſt intelligenda. Exponatur Circulus quilibet ABCD, cujus centrum E: & in illo ſe mutuo normaliter ſecent AC, BD. Tum ſi vertex Curvæ deſcribendæ ſtatuatur punctum A; abſcindantur ex quadrantibus BA, BC Circuli duæ quævis portiones æquales BF, BG; & excitatâ FH ipſi BD parallela, junctâque rectâ AG;

AG; hæc ſecabit in puncto N rectam FH. Et erit punctum N in Curva quæſita. Si modo abſcindantur aliæ duæ portiones, & eadem fiant; exiſtet etiam aliud punctum N in Curva eadem; itâque continuatione procedatur. Et deſcribetur Curva ANN; quæ vero pertranſiens vi deſcriptionis per punctum B poterit infra B continuari; ſi ident dem erigantur parallelæ ipſi FH ex punctis G rectæ GN ex alia parte GI; & lineæ AG ducantur, non ad G puncta, ſed ad F; ſeu jungantur AF. Nam hæ ipſæ AF productæ præbebunt puncta N Curvæ continuatæ; hæcque Curva eſt, quæ *Ciſſoides* vulgo dicta a Græco vocabulo, hederæ nimirum ſpeciem gerens, dum ſuo Circulo adhæret, Diocli tribuitur inventori.

Ciſſoides talis eſt naturæ; ut ſumpto in circumferentia Circuli genitoris puncto quovis F, ductâque FH diametro AC perpendiculari, & ſecante Ciſſoidem in puncto N, ſint ſemper continuè proportionales rectæ lineæ CH, FH, AH, NH. Demonſtratur. Ducta per punctum N rectâ ANG, quæ in G occurrat peripheriæ Circuli Genitoris, æquales fiunt arcus BF, BG; idcircoque, ductâ rectâ GI ipſi BD parallelâ, æquales erunt quoque portiones EH, EI. At vero propter ſimilia triangula AGI, ANH, eſt AI ad GI, ſive FH uti AH, ad NH. Igitur erit quoque CH. FH :: AH. NH. Sed propter Circulum; CH. FH :: FH. AH. Igitur ex æquaratione; FH. AH :: AH. NH. Quare quatuor continuæ proportionales erunt CH, FH, AH, NH.

Hinc facile fuit Diocli inter datas duas rectas lineas binas medias proportionales invenire. Quippe Fig.45. ſi P, & G ſint duæ rectæ lineæ datæ, inter quas oporteat duas alias medias proportionales invenire: deſcriptâ ſuâ Curvâ ANB, faciebat ut P, ad G ita CE, ad EK; ductâque rectâ CKN, quæ occurreret

ret Curvæ A B N in puncto N, demittebat per punctum N ad diametrum Circuli Genitoris A C perpendicularem F N H; atque adeò per ipsius Curvæ ANB naturam, habebat inter CH, & N H, duas medias proportionale F H, A H; cum interim C H prima esset ad N H ultimam, ut C E, ad E K; sive etiam ut P prima ad G ultimam ex datis. Unde nil aliud ipsi supererat; quàm ut faceret primò ut C F, ad F H; ita P, ad quartam, quæ sit dicta Q. Et secundò ut F H, ad A H, ita Q, ad R. Nam quemadmodum erant continuæ proportionales, quatuor rectæ lineæ C H, F H, A H, N H; ita etiam continuæ erunt proportionales quatuor magnitudines, P, Q, R, G.

Hinc etiam; si ex puncto A erigatur recta A L ipsi A C perpendicularis, & puncta Curvæ A N B referri debeant ad puncta rectæ lineæ AL per demissas perpendiculares N M; haud difficile erit æquationem invenire, quæ ejusmodi relationem nobis sub oculos ponat. Nam si ponatur diameter A C $= a$, abscissa A M $= x$, & ordinata M N $= y$; propter parallelogrammum A N, erit etiam N H $= x$; & A H $= y$. Unde, cum sit reliqua portio C H $= a-y$; & per Circuli naturâ inveniatur recta F H $= \sqrt{ay-yy}$; ob continuò proportionales C H, F H, A H, N H; erit ut $a - y$ ad $\sqrt{ay-yy}$, ita y, ad x. Sive etiam ut $aa - 2ay + yy$ ad $ay - yy$, ita yy, ad xx. Sed $aa - 2ay + yy$ est ad $ay - yy$, ut $a-y$, ad y; quare erit ut $a - y$ ad y, ita yy, ad xx; propterea que, factâ mediorum, & extremorum mutua multiplicatione, habebitur $y^3 = axx - yxx$ pro æquatione quæsita ad Cissoidem.

Ex hac æquatione liquet naturam Cissoidis hanc esse, ut Cubus cujusvis ordinatæ M N deficiat a Solido,

lido, quod fit ex recta constanti A C in quadratum abscissæ A M, Solido alio, quod fit ex eodem abscissæ AM quadrato, in ipsam ordinatam M N; unde facile nobis erit alias Curvas lineas ad ipsius similitudinem in infinitum effingere; scilicet, si faciamus, ut non modo Cubus, sed quævis alia superior cujusvis ordinatæ potestas deficiat a producto homogeneo, quod fit ex aliqua recta linea constante, parametro deinceps nominando, in potestatem reliquam abscissæ correspondentis, producto alio homogeneo, quod fit ex eadem abscissæ potestate in ipsam ordinatam. Atque, eadem retenta denominatione, si porrò dicatur m index potestatis, ad quam ascendit abscissa; poterunt hæ omnes Cissoides hac unica æquatione generali definiri; $y^{m+1} = ax^m - yx^m$, dummodò non supponatur $m = 1$; quo casu æquatio evadet $yy = ax - yx$; locus ad hyperbolem inter asymptotos. Aliis numeris indicante potestate m semper erit Cissoides, seu species Cissoidis.

Verumtamen, ut methodus constans, & generalis habeatur omnes hasce Cissoides describendi organicè simili modo, quo superiori capite Conicas omnes sectiones in infinitum descripsimus; assumatur recta A B pro diametro, sive linea abscissarum, & recta magnitudine data A C pro Parametro ipsarum; quæ contineant angulum C A B, æqualem ei, quem ordinatæ cum abscissis debent constituere. Nam, tametsi in Cissoide Dioclis ordinatæ ad angulos rectos suis abscissis sint applicatæ, nihil tamen vetat, quominus eas in quovis alio angulo adplicatas consideremus. Tum per punctum C ducatur recta C D ipsi A M parallela, in qua sumptâ portione quavis C E; abscindatur ex A B portio altera A F; junganturque Rectæ, seu Regulæ A E, C F, quæ mutuò se secent in Fig. 46.

N pun-

puncto N; erit hoc punctum N in Cissoide Dioclis, sive in prima Cissoide; siquidem portio A F fuerit quarta proportionalis in ordine parametri A C, & portionis C E; erit verò in secunda Cissoide; si eadem portio A F fuerit quinta proportionalis in ordine earundem linearum AC, AE; atque ita deinceps. Continuata verò intersectio N per determinatum motum Regularum A E, C F præbebit Curvam generatam.

Ducatur enim ad punctum N recta M N ipsi A C parallela, & ex puncto N ducatur recta N O æquidistans diametro A B, ponaturque parameter A C $= a$; abscissa AM, sive ON $= x$; & ordinata M N, sive AO, y; eritque portio altera C O $= a - y$: & propter similitudinem triangul. A O N, A C E; invenietur denique C E $= \frac{ax}{y}$. Unde si portio A F fuerit primò quarta proportionalis in ordine parametri AC, & portionis C E; erit A F $= \frac{ax^3}{yyy}$; & propterea, quia propter similitudinem triangul. C O N, C A F; C O est ad O N, ut C A, ad A F, erit ut $a - y$ ad x, ita a ad $\frac{ax^3}{yyy}$; proindeque erit $ax = \frac{aax^3 - ayx^3}{yyy}$; sive $y^3 = axx - yxx$; quæ est æquatio ad Cissoidem Dioclis; sive primam Cissoidem. Etsi porro eadem portio A F statuatur quinta proportionalis in ordine earundem linearum A C, C E, invenietur ipsa A F $= \frac{ax^4}{y^4}$; adeòque cum sit

ut $a - y$ ad x, ita a ad $\frac{ax^4}{y^4}$; erit $ax = \frac{aax^4 - ayx^4}{y^4}$ sive $y^4 = ax^3 - yx^3$; quæ est æquatio ad secundam Cissoidem; atque ita methodus in infinitum procedet.

Ceterum hæ Cissoides non abs re dici poterunt aliquo modo per analogiam aliquam Cissoides Ellipticæ; quandoquidem in iis potestas ordinatæ deficit a producto homogeneo, quod fit ex parametro in reliquam potestatem abscissæ, producto alio, quod fit ex eadem potestate abscissæ in ipsam ordinatam: eòque magis, quòd aliæ Cissoides ad ipsarum similitudinem excogitari possunt, in quibus, cum potestas ordinatæ excedat productum parametri in potestatem reliquam abscissæ, producto alio, quod fit ex eadem abscissæ potestate in ipsam ordinatam, non immerito per analogiam aliquam hyperbolicæ Cissoides dici eæ queunt. Designantur autem hæ aliæ Cissoides omnes hac unica æquatione generali $y^{m+1} = ax^m + yx^m$; vocando a parametrum, y ordinatam, & x abscissam correspondentem; ponendoque etiam litteram m, pro exponente potestatis, ad quam ascendit abscissa: & describentur eadem ferè ratione ac Cissoides Ellipticæ.

Nam si recta A B sit earum diameter, sive linea abscissarum, & A C parameter earumdem, ducatur per punctum C recta C D ipsi A B parallela; & sumptâ in ea portione quavis CE, abscindatur ex A B portio altera minor A F: & productâ C A usque in G, ut sit A G ipsi C A æqualis, jungantur rectæ, seu Regulæ A E, G F, quæ sibi mutuò conveniant in Fig. 47.

aliquo puncto N; cum portio AF minor ponatur CE; erit hoc punctum N in prima Cissoide hyperbolica, si portio minor AF fuerit quarta proportionalis in ordine Parametri AC, & portionis CE: erit vero in secunda Cissoide hyperbolica, si eadem portio AF fuerit quinta proportionalis in ordine earundem linearum AC, CE, atque ita deinceps.

Ductâ siquidem ad punctum N rectâ MN ipsi AC parallelâ; erectâque ex eodem puncto N recta NO, diametro AB æquidistanti; ponantur AC, sive GA $= a$; MN, sive AO $= y$; & AM, sive ON $= x$, eritque tota GO $= a+y$: & propter similitudinem triangulorum AON, ACE, invenietur AE $= \frac{ax}{y}$. Unde, si fuerit primò portio AF quarta proportionalis in ordine parametri AC, & portionis CE, erit AF $= \frac{ax^3}{yyy}$: & propterea, quia propter triangula similia GON, GAF; est GO, ad ON, ut GA, ad AF; erit ut $a+y$, ad x, ita a, ad $\frac{ax^3}{yyy}$; proindeque erit $ax = \frac{aax^3 + ayx^3}{yyy}$. Sive $y^3 = axx + yxx$: quæ est æquatio ad primam Cissoidem hyperbolicam. Et si fuerit secundò eadem portio AF quinta proportionalis in ordine earumdem AC, CE; invenietur ipsa AF $= \frac{ax^4}{y^4}$. adeoque, cum sit ut $a+y$, ad x, ita a, ad $\frac{ax^4}{y^4}$; erit $ax = \frac{aax^4 + ayx^4}{y^4}$; sive $y^4 = ax^3 + yx^3$; quæ

quæ est æquatio ad secundam Cissoidem hyperbolicam. Et ita de reliquis.

Atque hæc de Cissoidibus tàm Ellipticis, quàm hyperbolicis ad similitudinem Cissoidis Dioclis a nobis excogitatis dixisse sufficiant. Nunc ad Conchoidem Nicomedis gradum facimus, quæ ejusmodi ortum habet. Exponatur recta quæpiam DE; cui ad angulos rectos inclinetur recta altera AB; quæ protrahatur usque ad aliquod punctum C: & ex eo protrahatur usque ad aliquod punctum C: & ex eo ducantur versùs eandem partem DE plures rectæ lineæ CN, quæ ipsi DE occurrant in punctis L; Fig. 48. & ex iis abscindantur portiones LN singulæ AB æquales; erit Curva linea ANN, quæ transit per extrema earum linearum, illa eadem Curva linea, quæ a Nicomede excogitata Conchoides nominatur; diceturque ejus Polus punctum C, & Regula recta DE: proindeque talis Curvæ ea erit natura, sive proprietas præcipua, ut si a Polo ad ipsius parametrum plures rectæ lineæ ducantur, non quidem eæ, ut in Circulo, sed ipsarum portiones regulâ, & Curvâ comprehensæ sibi invicem æquentur: patetque ex ipsa genesi, Regulam DE esse asymptoton Curvæ ANN: sive, quod idem est, Curvam ipsam ANN nunquàm posse concurrere cum Regula DE in aliquo puncto; licèt ad ipsam continuè appropinquetur; cum semper inter eas obliquè interiiciatur distantia LN intervallo principali AB æqualis.

Hujus aliæ Curvæ beneficio manifestum est, fieri posse, ut ex dato puncto ducatur ad datum angulum recta linea, ita ut portio, quæ inter anguli latera interiicitur aliam datam rectam lineam adæquet; dummodo ipsum datum punctum in dato an- Fig 49. gulo non existat. Nam si EDN fuerit angulus datus, & C punctum extrà ipsum existens, ex quo ducenda sit recta linea quæsita; demittatur ex puncto

cto C recta CB ipsi DE perpendicularis, eaque extendatur usque in A; ut sit AB alteri datæ rectæ lineæ æqualis. Jam porrò Polo quidem C, Regulâ DE, & intervallo AB describatur linea Conchoides AN, quæ occurret ipsi DN in puncto N: & palam est, per naturam hujus Curvæ, quòd, si ducatur ex puncto C ad punctum N recta CLN, portio ipsius LN, utroque anguli latere comprehensa, ipsi AB sit æqualis.

Demonstratur autem Conchoides descripta occurrere rectæ DN in puncto N. Nam hæc est Conchoidis proprietas altera, quòd scilicet, si recta quædam linea inter Regulam, & Conchoidem cadat, ea producta ab ipsa Conchoide secetur. Sumatur enim in recta linea DN punctum quodvis R; per quod agatur recta PRQ regula DE parallela: & fiat, ut BR, ad BA, ita CR, ad quartam proportionalem, quæ major erit quàm CR; sicuti BA major est, quàm BR. Proindeque, si centro C, & intervallo inventæ proportionalis describatur Circulus; hic rectam PQ necessario secabit in puncto aliquo Q, cum CR sit omnium minima, quæ a puncto C ipsi PQ duci possunt. Jam verò, ductâ rectâ COQ; CR erit ad CQ, sive ad quartam proportionalem inventam, ut BR, ad OQ; quare erit, ex æqua ratione, ut BR ad BA; ita BR ad OQ: atque adeò, cum æquales sint rectæ BA, OQ, erit punctum Q in ipsa Conchoide AN. Unde si parallela PQ ipsi Regulæ DE secet Conchoidem in puncto Q; multò magis eam in puncto aliquo secabit recta linea DN obliqua ipsi DE.

Ex eo autem quòd ope Conchoidis fieri possit, ut ad datum angulum ducatur ex puncto extrà illum dato recta linea; ita ut portio anguli lateribus contenta aliam datam rectam lineam adæquet; facile fuit

fuit Nicomedi inter datas duas rectas lineas binas alias medias proportionales invenire. Sint etenim CD, DB duæ rectæ lineæ datæ; inter quas oportet duas alias medias proportionales invenire. Conjungantur eæ ad rectos angulos in puncto D: & completo parallelogrammum DA: utraque ipsarum AC, CD secetur bifariam in punctis F, & G: tùm junctâ BF producatur usque adeò occurrat rectæ lineæ CD productæ in puncto H: &, erectâ perpendiculari GM, abscindatur ex ea portio talis, ut junctâ DM, sit hæc ipsi AF æqualis. Porrò, junctâ rectâ HM, agatur per punctum D recta DE ipsa HM parallela: & angulo existente EDN, ducatur ope Conchoides à puncto dato M recta linea MEN; ita ut portio EN utroque latere anguli intercepta ipsam DM, sive AF adæquet: ac deinceps juncta recta BN producatur usque adeò, ut occurrat rectæ AC, in puncto O: atque, his omnibus peractis, inter CD, & DB inventæ erunt duæ mediæ proportionals AO, DN. Fig. 50.

Quoniam enim CD bifariam secatur in puncto G, & ipsi in directum adiicitur recta DN, erit rectangulum CND, unâ cum quadrato ex DG æquale GN quadrato. Quare, adposito communi GM quadrato, erit rectangulum CND unâ cum quadratis ex DG, & GM æquale duobus GN, GM quadratis: ac proindè, quia DG, GM quadrata sunt æqualia quadrato, quod fit ex DM; & GM, GN quadrata sunt æqualia quadrato, quod fit ex MN; erit rectangulum CND unà cùm DM quadrato æquale MN quadrato. Et quoniam AB, sive CD, est ad DN, ut AO, ad BD, sive AC; erit, invertendo, ut DN ad CD, ita AC ad AO; sed CD est ad duplam ipsius DH, ut AF ad ipsius duplam AC. Igitur, ex æqua ratione perturbando, erit ut ut DN ad DH, ita AF ad AO. Jam verò propter parallelas DE, HM; DN, est ad DH, ut EN ad EM; quare erit, ex æqua ratione, ut AF ad AO, ita EN, ad ME: atque, componendo, ut AF, ad FO, ita EN, ad NM: ponitur autem AF ipsi EN æqualis; igitur erit etiam FO æqualis ipsi MN; eritque FO quadratum æquale MN quadrato. Sed MN quadratum ostensum est æquale rectangulo CND unà cum DM quadrato; & FO quadratum est æquale rectangulo COA unâ cum AF quadrato; cùm AC sit secta bifariam in puncto F; eique in directum adjecta recta AO; Ergo erit rectangulum CND una cum DM quadrato æquale rectangulo COA unà cum AF quadrato. *Est* autem DM quadratum æquale AF quadrato; igitur erit etiam rectangulum CND æquale rectangulo COA; & propterea erit ut CO ad CN, ita DN, ad OA. Jam vero CO est ad CN, ut DB, ad DN, & ut AO, ad AB: quare fit ut DB, ad DN, ita DN, ad AO, & ita AO, ad AB, sive CD; proindeque quatuor magnitudines DB, DN, AO, CD continuè proportionales erunt. Q. F. O.

Porro si puncta ipsius Conchoìdis referri debeant ad rectam AB per demissas perpendiculares NM; haut difficile erit ex ipsa Curvæ natura æquationem invenire, quæ relationem hanc nobis ostendat. Nam, si ponatur intervallum $AB = a$, distantia CA Poli à Conchoidis vertice, $= c$, abscissa $AM = x$, & ordinata $MN = y$; erit $CM =$
Fig. 51 $c - x$, & $BM = a - x$: eritque insuper, propter triang. rectang. CMN, $CN = \sqrt{yy + cc - 2cx + xx}$: & per naturam Conchoìdis $LN = a$. Unde cum

sit ut CM ad CN, ita BM, ad LN, erit ut $c - x$ ad $\sqrt{+ yy + cc - 2cx + xx}$, ita $a - x$, ad a; adeoque terminos omnes quadrando, ut $cc - 2cx + xx$, ad $yy + cc - 2cx + xx$, ita $aa - 2ax + xx$, ad aa; & consequenter dividendo ut, $cc - 2cx + xx$ ad yy, ita $aa - 2ax + xx$ ad $2ax - xx$. Unde facta mutuà extremorum, ac mediorum multiplicatione, invenietur $aayy - 2ayyx + yyxx = 2accx - ccxx - 4acxx + 2cx^3 + 2ax^3 - x^4$; quę ordinata juxta regulas artis reducetur ad hanc aliã

$$\begin{array}{llll} x^4 - 2ax^3 & + 4acxx & - 2accx & + a^2y^2 = 0; \\ \quad - 2cx^3 & + ccxx & - 2ay^2x & \\ & + yyxx & & \end{array}$$

eaque erit æquatio ad Conchoìdem quæsita.

Cùm autem æquatio ejusmodi sit aliquantùm implicata; nec tam claram, ac distinctam nobis ingerat Conchoìdis notionem; satius erit ejus puncta omnia ad unicum Polum referre, & invenire æquationem, quæ exprimat nobis relationem, quæ erit inter rectas ex Polo ad Conchoidem ductas, & ipsarum portiones, quæ Polo, & Regula continentur; nempe inter rectas CN, & ipsarum portiones CL. Nam si ponatur $CN = x$, & $CL = y$; erit $LN = x - y$; adeoque cum unaquæque ipsarum LN per naturam Conchoìdis sit æqualis intervallo AB, positâ adhuc $AB = a$, invenietur æquatio $y - x = a$: quæ sanè longe simplicior est antecedente, & magis apertam nobis reddit Conchoìdis naturam, cum oporteat, Conchoidem ANN talis esse naturæ, ut differentia rectarum CN, CL, quòcumque CN pertingat, datam rectam lineam perpetuò adæquet.

Atque huic æquationi insistendo facile nobis erit Conchoides alias in infinitum effingere; si faciamus, ut non modo differentia ipsarum linearum CN, CL, sed differentia quarumlibet potestatum earumdem linearum homogeneam potestatem alterius datæ rectæ lineæ adæquet. Et eadem omnino retenta denominatione; si porrò dicatur m exponens potestatis, ad quam ascendunt eæ omnes rectæ lineæ; poterunt omnes illæ in infinitum Conchoides hac unica æquatione designari; $x^m - y^m = a^m$: ad quas definiendas satis erit in ipsa æquatione valorem exponentis m substituere; quippe si ponatur $m = 1$; erit æquatio illa $x - y = a$, quæ primam Conchoidem designat. Si vero ponatur $m = 2$; erit eadem illæ æquatio $xx - yy = aa$; quæ secundam Conchoidem denotat: atque ita deinceps.

Sed alterius Conchoidis mentionem factam invenio; nempe ut omnia rectangula, quæ fiunt ex portionibus rectarum a Polo ad Curvam ductarum, per
Fig. 52. regulam abscissis inter se sint æquale. Ita si C fuerit Polus, DE regula, & ANN Curva; ducaturque ex Polo ad Curvam recta quævis CLN regulæ occurrens in puncto L; erit ipsius Curvæ ANN proprietas, ut rectangulum, quod fit ex CL, in LN sit æquale semper rectangulo ex CB, & BA: unde positis $CL = x$, $LN = y$, $CB = a$, & $BA = c$, erit æquatio puncta hujus Curvæ ad Polum referens $xy = ac$. Quòd si autem Curvæ aliæ ad hujus similitudinem in infinitum quærantur, eæ omnes continebuntur in hac æquatione general $x^m\ y^n = a^m\ c^n$; nempe faciendo, ut productum, quod fit ex duabus quibusvis potestatibus ipsarum CL, LN æquale sit producto, quod fit ex aliis duabus homogeneis potestatibus rectarum CB BA.

De

De Conchoide Nicomedis, & Cissoide Dioclis peractum est. Invenerunt has Curvas secundi generis hi auctores ad duas medias proportionales inter datas duas rectas lineas præbendas, uti diximus. Sed manifestum est per intersectionem duarum Curvarum primi generis id bene confici; quod Veteres etiam effecerunt, velnti indicavimus id *pag.* 94. Et etiam idem præstitimus *pag.* 58. & 59. Quare nihil hic adiicere amplius juvat de solutione hujus problematis per intersectionem dictam inventi sive a Veteribus, sive a Recentioribus: qui illud & per intersectionem ipsam dictam duarum Curvarum primi generis conficiunt, & per trisectionem anguli dati, & omnibus aliis modis, quibus æquationes trium dimensionum construuntur. Igitur nil necesse erat, ut nova excogitaretur Curva ad duas medias proportionales inter duas datas rectas lineas adinveniendas. Profecto valde facile Curvas invenire, inque medium proferre, nulla determinatione antea præeunte, quòd per Curvā datū al.quod confici debeat problema determinatum: id enim ad solam solutionem problematis indeterminati reducitur. Sed longe difficilius Curvam ad aliquod datum officium absolvendum propositi antea problematis, seu determinatæ quæstionis meditari per caussam, vel, uti ajunt, *a priori*.

Et quidem quàm aspera, & salebrosa via, quàm longa argumentationis ambage Nicomedes problema ipsum duarum mediarum proportionalium inter duas datas rectas lineas per inventam jam ad id Conchoidem confecit. Verùm equidem existimo per analysim in eam solutionem Geometram incidisse; quod demonstrationis finis indicare posset. Et noscimus quidem eam fuisse Veterum Geometrarum artem, & Apollonii, & Archimedis, certe id a nonnullis putatur, ut, quod per analysim ipsi invenissent, componendo

O 2 dein;

dein demonſtratione ſynthetica oſtendiſſent, analyſi obſerata. Profectò humanæ mentis vires non ita facile videntur ad quaſdam ſolutiones problematum, & demonſtrationes illarum, ad aliquas maxime ſolutiones, & demonſtrationes Archimedeas, per ſyntheſim adtingere. Dum analyſim dico, non Algebricam analyſim noſtrorum temporum dico; ſed methodum illam inveniendi primò per reſolutionem, non per compoſitionem, & *a priori*. Illam dico analyſim, qua, ut Diophantum Alexandrinum prætercam analyticè ſemper ſua conficientem, uſus etiam fuit Apollonius in nonnullis problematibus; præcipue in poſtremis quæſtionibus Libri primi. Invento problemate per analyſim; determinatoque, ac cognito, quod quærebatur; facile deinde eſt, & proclive compoſitionem, ſeu conſtructionem per ſyntheſim condere, aut nova excogitata demonſtratione ſynthetica, aut etiam eadem analyticâ inventione inverſâ, & in compoſitionem immutatâ.

Igitur problema de linea recta ex puncto dato extra angulum datum ducenda intra ipſum angulum, ut ejus portio intercepta inter latera anguli ſit æqualis datæ rectæ lineæ, quod unum erat, quare de Conchoide invenienda Nicomedes cogitavit, ita nos modo conficimus.

Fig. 53

Dato angulo BAC, & extra illum dato puncto D, ducere ex D lineam DF, ut portio ejus EF intercepta inter latera BA, CA anguli dati æqualis ſit datæ lineæ N. Ponatur jam factum eſſe, quod quæritur. Agatur ex D linea DP normalis ad AC, quæ producta occurrat in M lineæ FM parallelæ emiſſæ AO ex F puncto, ubi ducta ex D linea DEF, cujus pars EF eſt quæſita, occurrit ipſius anguli dati lateri AB. Ex eodem F demittatur quoque FO parallela DM conveniens cum AC in O. Nunc ſint datæ,

datæ, ac cognitæ AP $= d$. PQ $= c$. AQ $= m$. DP $= g$; & DQ $= a$. Sit verò QM ignota x. Erit DM $= a + x$. Eſt quidem AP. PQ :: FM. MQ. Quare FM $= \frac{dx}{c} =$ PO. Et eſt DM. MF :: DP. PE.

Igitur PE $= \frac{dgx}{ca + cx}$. Atque EO $=$ PO $-$ PE $=$

$\frac{dx}{c} - \frac{dgx}{ca+cx} = \frac{adx + dxx - dgx}{ca + cx}$. Verùm habetur $FE^2 = FO^2 + EO^2$. Igitur erit equatio, dictâ b datâ lineâ N, $bb = cc + 2cx + xx +$

$$\frac{\overline{adx + dxx - dgx}^{\,2}}{\overline{ca + cx}^{\,2}}$$

Conſtructur autem ſic.

Fig. 54.

Sint omnia poſita, uti ſupra. Et ſit angulus datus BSC. Accipiatur in DPQ $=$ portio QH $=$ PQ $= c$. Ex H agatur HO parallela SC; quæ ſecet SB latus anguli dati in I. Erit HI $=$ SP ($=$ AP. *Fig.* 53.) $= d$. & QI $=$ SQ ($=$ AQ. *Fig.* 53.) $= m$. Atque brevitatis cauſsâ ſit dicta $ad - dg = ee$. Eſt quidem a major g. Quare ee quantitas eſt poſitiva. Sumatur in HO portio HK $= \frac{ad}{c} - \frac{ee}{c}$. Hęc quantitas eſt poſitiva; nam ee minor quantitas eſt, quàm ad: poteſt autem eſſe quantitas major, vel minor HI. Ex K demittatur KY parallela DP occurrens SC alteri lateri anguli dati in Y. Itemque, productâ SQI ex parte S, ſit in illa QA $= \frac{am}{c}$; quæ major ſemper erit QS. Nam QS $=$ QI $= m$; & a major eſt neceſſario c. Ex A agatur AV parallela HI.

Tum

Tum in eadem AI abscindatur QG $= \frac{adm - eem}{cc}$. Quæ eadem ratione ex factis quantitas est positiva. Potest autem esse major, vel minor, quàm AQ; & esse major, vel minor quàm AS; uti cognoscetur ex determinatione jam effecta harum quantitatum. Ex G agatur GR parallela etiam SC; in qua sit GR = DQ = a. His præstitis; asymptotis AG, AV describatur Hyperboles RT, quæ pertranseat per punctum R. Sed centro Y, intervallo YN = datæ lineæ b, describatur circulus. Hic, si secet in N hyperbolem, ductâ NM parallelâ SC, & occurrente KY in L, atque SAI in F, & DH in M, præbebit quæsitam QM (x). Nam junctâ DF, erit EF data linea b inter dati anguli latera interposita.

Demonstratur. Nam est MF $= \frac{dx}{c}$ ob similia triangula QHI, QMF: & est ML = HK. Ergo si LN dicatur z, erit NF = ML + LN − MF $= z - \frac{dx}{c} - \frac{ee}{c} + \frac{ad}{c}$. Est quidem QF $= \frac{mx}{c}$ ob eamdem similitudinem triangulorum. Et AF $= \frac{mx}{c} + \frac{am}{c}$. Verùm ob hyperbolem est AF in FN = AG in GR; idest $z - \frac{dx}{c} - \frac{ee}{c} + \frac{ad}{c}$ in $\overline{\frac{mx}{c} + \frac{am}{c}} = \frac{aadm - aeem}{cc}$. Hinc facto primo producto; ac dein facta multiplicatione per c, atque divisione per m; & constituta æqnatione; erit $zx + az - \frac{dx^2}{c} - \frac{eex}{c} = 0$. Sive $z = \frac{dee + eex}{ca + cx} =$

$\frac{adx + dxx - dgx}{ca + cx}$ (substitutâ loco e^2 ipsâ $ad - dg$) = LN. Est verò ob Circulum; $YN^2 = LN^2 + YL^2$. Et YL $= c + x$. Igitur habebitur $bb = cc + 2cx + xx + \overline{\frac{adx + dxx - dgx}{ca + cx}}^2$. Quæ est æquatio supra inventa. Q.F.O.

Si fiat intersectio N Circuli, & Hyperbolis infra SC latus anguli dati, ductâ NLMF, uti supra, junctâque DF; hæc producta donec occurrat SC ex alia parte in F, dabit in illa parte etiam EF quæsitam in angulo ESA æquali illi, qui datus fuit: quod eodem modo, mutatis signis mutandis, demonstratur.

CAPUT

CAPUT VI.

DE LINEIS CURVIS,

Quæ à Cartesio in sua Geometria indicantur.

Etsi Veteres quamplures alias Curvas lineas præter hactenus recensitas excogitaverint; attamen, quia eæ sunt ex earum numero, quæ Mechanicæ, sive Trascendentes dici possunt; neque ulla superest alia, quæ ad Curvas Geometricas referri queat, certè ex iis, quarum cognitionem aliquam habemus; hinc est, ut ad eas Curvas Geometricas nunc gradum inferamus, quæ ab ipsis recentioribus Geometris propria minerva sunt inventæ. Nam in his Curvarum Elementis pertractandis, eum quidem ordinem nobis ab initio placuit observare; ut primò de Curvis Geometricis; tum ordine de Curvis Mechanicis, sive Trascendentibus agendum esset. Et quoniam post Veteres inter primos omninò hanc provinciam aggressus est bonis avibus Renatus Cartesius; neque etiam deinceps alii præclari Viri extitissent, qui partem hanc Geometriæ ad umbilicum perduxissent, nisi illis præcipuè Cartesius prævisset; rationi conveniens est, ut de Lineis Curvis primo loco agamus, quę à Cartesio in sua Geometria indicantur.

Et primò quidem Cartesius initio Libri secundi suæ Geometriæ Instrumentum ex variis Regulis compositum affert, cujus ope non una, aut plures, sed infinitæ Curvæ lineæ sectionibus Conicis magis, magisque

compositæ describi, atque intelligi possunt. Est autem hujusmodi Instrumentum, quale subjectum schema nobis exibet: nempè primo concipiendæ sunt duæ Regulæ ZO, XO, quæ aperiri, & claudi possunt ad arbitrium circa punctum O: tum iis inserendæ plures aliæ Regulæ adeò quidem inter se connexæ in punctis B, C, D, E, F, G, H; ut existente omninò clauso angulo sub primis duabus Regulis comprehenso XOZ, omnia illa puncta incidant in unum, idemque punctum A: sed ita, ut, pro ut ille angulus aperitur, Regula BC, quæ ipsi XO normaliter puncto B est semper affixa, propellat versus Z Regulam CD, quæ super ZO incedendo efficiat cum illa semper angulos rectos. Et rursus ut Regula CD propellat Regulam aliam DE, quæ versùs X super XO ita movetur, ut parallela semper maneat priori BC; atque ita etiam ut Regula DE propellat Regulā EF ipsi DC æquidistanter super ZO incedentem; & ut EF propellat Regulam FG, hæcque denuò alteram GH, sicque continuò in infinitum. Fig 55.

Hoc instrumento parato; palam est, quòd, dum aperitur angulus XOZ, & describit interim punctum B lineam Curvam AB, quæ est Circuli Circumferentia, cum maneant semper æquales portiones AO, BO; reliqua puncta D, F, H, ubi ceterarum Regularum intersectiones fiunt, describant eodem tempore Curvas alias AD, AF, AH, quæ Circulo, & ipsis sectionibus Conicis magis, magisque compositæ fiunt. Et quod attinet ad primam AD; si ponatur BO, sive AO $= a$, CO $= x$; & DC $= y$; quia similia sunt triangula CBO, DCO, utpotè rectangula, & communem angulorum in O habentia, erit ut BO ad CO, ita CO ad DO: adeoque, cum propter triangulum rectangulum DCO, invenia-

tur

tur $DO = \sqrt{xx+yy}$, erit ut a ad x, ita x ad $\sqrt{xx+yy}$; sive ut aa, ad xx, ita xx ad $xx+yy$: proindeque, factâ mutuâ mediorum, & extremorum multiplicatione erit $x^4 = a^2 x^2 + a^2 y^2$; æquatio, quæ primæ Curvæ positæ AD naturam nobis exprimet. Cum verò æquatio ista ad quartam dimensionem ascendat, liquet, ipsam Curvam AD tertii generis esse.

Quod verò spectat ad secundam; retentâ adhùc AO, sive $BO = a$, ponatur $EO = x$, & $EF = y$; & quoniam propter triangulum rectangulum FEO, invenietur $FO = \sqrt{xx+xy}$, si porrò ponatur $CO = z$; quia similia sunt triangula BCO, EFO; BO est ad CO, ut EO ad FO, proindeque a est ad z, ut x, ad $\sqrt{xx+yy}$, sive aa ad zz, ita xx ad $xx+yy$. Quare, factâ mutua mediorum, ac extremorum multiplicatione, elicietur æquatio $zz\,xx = aa\,xx + aa\,yy$. Jam vero, quia propter similia triangula BCO, CDO, DEO, est EO quarta proportionalis in ordine duarum BO, CO; igitur, si fiat ut a ad z, ita z ad $\frac{zz}{a}$; & ut z ad $\frac{zz}{a}$, ita $\frac{zz}{a}$ ad $\frac{zzz}{aa}$; invenietur $EO = \frac{zzz}{aa}$. Erat autē eadem $EO = x$; proindeque erit $zzz = aax$, sive $z = \sqrt[3]{aax}$; & consequenter $zz = \sqrt[3]{a^4xx}$.

Unde

Unde, si in æquatione superiùs inventa $zz\,xx = aa\,xx + aa\,yy$; loco zz substituatur inventus ejus valor $\sqrt[3]{aaaaxx}$, habebitur sequens alia æquatio, $xx\sqrt[3]{aaaaxx} = aaxx + aayy$; sive $x^8 = aax^6 + 3aax^4yy + 3aaxxy^4 + aay^6$; quæ ipsius Curvæ AF naturam commonstrabit.

Nec dissimiliter invenietur æquatio exprimens naturam tertiæ Curve AH, nam retentâ semper AO, sive $BO = a$; si ponatur $GO = x$, $GH = y$; propter triangulum rectangulum GHO, invenietur $HO = \sqrt{xx+y^2}$; unde, si præterea ponatur $CO = z$, quia, propter triangula similia CBO, HGO, est BO ad CO, ut GO ad HO, habebitur, ut supra, æquatio $zzxx = aaxx + aayy$. At verò propter similitudinem triangulorum CBO, DCO, EDO, FEO, GFO; est GO, sexta proportionalis in ordine duarum BO, CO. Igitur si fiat, ut a ad z, ita z ad tertiam; atque ita continuetur progressio, invenietur sexta proporzionalis $GO = \frac{z^5}{a^4}$: & proinde, cum priùs esset eadem $GO = x$; erit $z^5 = a^4 x$; sive $z = \sqrt[5]{a^4x}$, atque adeò $zz = \sqrt[5]{a^8xx}$. Unde in æquatione superiùs adinventa; $zzxx = aaxx + aayy$; ponendo loco zz ipsius valorem $\sqrt[5]{a^8xx}$, invenietur loco illius, sequens alia æquatio,

xx

$xx\sqrt[5]{a^8xx}, = aaxx + aayy$; sive $x^{12} = aax^{10} + 5aax^8yy + 10aax^6y^4 + 10aax^4y^6 + 5aaxxy^8 + aay^{10}$. Quæ est æquatio Curvæ quæsita.

Eadem ratione ceterarum aliarũ Curvarum, quæ superiori Instrumento describuntur, locales ordine æquationes invenientur: & ex iis, quæ modo tradidimus, quemadmodum etiam ex ipsa methodo, qua tales Curvarum æquationes eruuntur, facile cognosci potest, ipsas Curvas Instrumento illo genitas ordine magis, magisque compositas esse; quin etiam hanc compositionem ita in infinitum continuari, ut uniuscujusque Curvæ æquatio quatuor semper dimensionibus excedat æquationem Curvæ proxime antecedentis. Advertendumque etiam, nos consultò in linearũ Curvarum æquationibus eliciendis posuisse punctum O extrà Curvas situm pro Principio, ac Origine abscissarum suis ordinatis correspondentium: quippe si pro illarum origine poneretur punctum A, quod in ipsis iis Curvis tanquàm vertex considerari potest, æquationes illarum Curvarum non nihilo intricatiores prodiissent.

Quod ut exemplo uno innotescat; proponatur æquatio invenienda prioris Curvæ AD, sumpto puncto A pro principio, sive origine abscissarum. Et jam si existente adhuc BO, sive AO $= a$; ponatur modò AC $= x$, & CD $= y$; erit tota CO $= a + x$. Et propter triangulum rectangulum DCO, invenietur DO $= \sqrt{yy + xx + 2ax + aa}$. Unde cùm similia sint triangula BCO, CDO; & propter hanc similitudinem BO sit ad CO, ut CO ad DO, erit

ut a ad $a + x$, ita $a + x$ ad $\sqrt{yy + xx + 2ax + aa}$; sive demptis irrationabilibus; ut aa ad $aa + 2ax + xx$, ita $aa + 2ax + xx$ ad $yy + xx + 2ax + aa$; vel etiam dividendo, ut aa ad $2ax + xx$, ita $aa + 2ax + xx$ ad yy: proindeque factâ mutuâ mediorum, & extremorum multiplicatione, elicietur æquatio $x^4 + 4ax^3 + 5a^2x^2 + 2a^3x = a^2y^2$; quæ, ut videtur, est quidem longè magis intricata æquatione illa quam, superiùs, faciendo punctum O originem abscissarum, deteximus.

Prætereà Cartesius eodem loco citato aliud indicat Instrumentum, quo Curvæ lineæ concipi, & describi possunt: scilicet, si planum CNKL moveatur sursum versus in recta linea, ita ut ejus latus KL sit in una, eademque recta linea KLA; & interim Fig. 56.
Regula GL circa punctum G rotata continuò ei sic admoveatur, ut simul quoque transeat semper per punctum L: quippè cum Regula ista continuò se se intersecet in punctis C cum latere plani CK, describent puncta intersectionum perimetrum alicujus lineæ Curvæ: quæ alia subindè, atque alia erit, pro ut ipsum planum CNKL alia subinde, atque alia pollet figurâ.

Ut si ponamus primò Planum rectilineum esse id, ut latus ejus CK sit aliqua recta linea; sumpto in recta KA puncto aliquo A pro origine, sive linea abscissarum, quas in eadem AK accipimus; junctâque GA, ducatur ex puncto aliquo C ipsius Curvæ descriptæ recta CB ipsi GA parallela; quæ GB erit una ordinatarum abscissæ AB correspondens. Tùm positis GA $= a$. KL $= b$; & LN eidem GA æqui-

æqui diſtanter ducta $= c$; ſi ponatur inſuper abſciſſa $BA = x$, & ordinata $BC = y$; quoniam ſimilia ſunt triangula NLK, CBK; NL eſt ad LK, ut CB ad BK. Proindeque faciendo, ut c ad b, ita y ad quartam; invenietur $BK = \frac{by}{c}$; atque adeò $BL = \frac{by}{c} - b$. Et $AL = x + \frac{by}{c} - b$. Quare, cum ſimilia ſint itidem triangula CBL, GAL; & propter hanc ſimilitudinem, CB eſt ad BL, ut GA, ad AL; erit ut y ad $\frac{by}{c} - b$, ita a ad $x + \frac{by}{c} - b$; ac proinde, factâ mediorum, & extremorum multiplicatione, producetur $\frac{aby}{c} - ab = xy + \frac{byy}{c} - by$; ſive $yy = cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$; quæ eſt æquatio GCE Curvæ deſcriptæ naturam deſignans; quam liquet hyperbolam eſſe aſymptoticam inter ſuas aſymptotos.

Fig. 57. Cujus quidem loci conſtructio facilis eſt; nam ſi protrahatur AG uſque in D, ut ſit $DG =$ rectæ NL; & per punctum D agatur recta DF lateri CK parallela, quæ conveniat cum recta AB in puncto F; hyperbola, quæ deſcribetur ſecundum aſymptotos DF, AF, et tranſibit per datum punctum G, erit eadem illa, ad quam ſuperior æquatio refertur. Nam poſitis $AB = x$. $BC = y$, $AG = a$, & NL, ſive $DG = c$, & $LK = b$, erit tota $AD = a + c$. Jam verò ductâ IH ipſi BA parallelâ, quia ſimilia ſunt triangula KLN, IHD; & propter hanc ſimilitudinem KL eſt ad NL, ut IH, ſive BA ad DH; faciendo, ut b ad c ita x ad quartam, invenietur $DH = \frac{cx}{b}$, ac proinde erit reliqua AH, ſive $BI = a + c - \frac{cx}{b}$, & portio $CI = a + c - \frac{cx}{b} - y$. Eſt autem propter hyperbolæ naturam, rectangulum $BCI =$ rectangulo AED, ſive etiam rectangulo AGD; quare erit $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy = ac$, ſive $yy = cy + ay - \frac{cxy}{b} - ac$; quæ eſt æquatio ſuperiùs inventa.

Quod ſi autem idem planum $CNKL$ terminetur parabola plana KNC, cujus vertex ſit punctum K, & axis recta KA; deſcribetur Curva alia compoſitior. Nam, retentâ eadem denominatione; ideſt, $AB = x$. $BC = y$. $GA = a$. $NL = c$. Et $KL = b$. Quia propter naturam Parabolæ, eſt NL quadratum ad CB quadratum, ut LK ad BK; faciendo ut cc ad yy, ita b ad quartam; invenietur $BK = \frac{byy}{cc}$; & conſequenter $BL = \frac{byy}{cc} - b$; & $AL = \frac{byy}{cc} - b + x$. Unde cum ſimilia ſint triangula GAL, CBL; & propter hanc ſimilitudinem GA ſit ad AL, ut CB, ad BL; erit ut a ad $\frac{byy}{cc} - b + x$, ita y ad $\frac{byy}{cc} - b$; proindeque factâ mediorum, & ex- Fig. 58.

tre-

tremorum multiplicatione, habebitur æquatio $\frac{by^3}{cc} - by + xy = \frac{aby^2}{cc} - ab$. Sive $y^3 - ccy + \frac{ccxy}{b} = ayy - acc$; quæ exprimet naturam Curvæ descriptæ; quæ est illa eadem, per quam Cartesius constructionem æquationum quinque, & sex dimensionum *Lib.* 3. *Geometriæ* subtiliter confecit.

Eadem ratione si planum $CNKL$ Curvis aliis terminetur, aliæ, atque aliæ Curvæ lineæ procreabuntur, quæ magis magisque compositæ erunt, pro ut ipsæ Curvæ, quibus planum terminari supponitur, compositæ assumuntur. Et speciatim si planum Circulus erit centrum habens in puncto L, orietur Veterum Conchoides; cum maneant semper æquales portiones regulæ CL. Sed non dissimulanda Cartesij ablepsia in tradenda Regula pro natura, & ortu harum Curvarum; quippè qui postquam lineas Curvas omnes ita in genera distinxerit, ut quodlibet genus duas semper dimensiones ordine contineat; nempe ut dicantur primi generis, cum ipsarum æquationes dimensionem secundam non excedunt; generis secundi cum eædem æquationes ad tertiam, vel quartam dimensionem ascendunt; generis tertii, quotiescunque ad quintam, vel sextam dimensionem pertingunt; hanc regulam, quoad compositionem earum Curvarum, quæ altero isto Instrumento describuntur, subjungit; scilicet, ut Curva descripta sit generis secundi, si ea, qua planum terminatur, sit primi generis; & ut sit generis tertii, si assumpta Curva linea ad genus secundum reducatur, atque ita in infinitum.

Hanc vero regulam fallacem esse, facile deprehendi potest ipso eodem Calculo, quo Cartesius facile esse

esse dixit veritatem suæ Regulæ cognoscere. Nam si ponamus $CNKL$ terminari ea Parabola Cubica, quæ est prioris speciei, in qua nempè Cubus ordinatæ adæquat solidum ex quadrato Parametri in abscissam correspondentem; & sit punctum K vertex hujus parabolæ, & KA ejusdem axis, aut diameter; retentâ semper eadem denominatione; quia propter naturam talis Parabolæ Cubus ordinatæ N L est ad Cubum ordinatæ CB, ut abscissa LK ad abscissam BK, faciendo ut c^3 ad y^3, ita b ad quartam, invenietur $BK = \frac{by^3}{c^3}$; atque adeò $BL = \frac{by^3}{c^3} - b$; & $AL = \frac{by^3}{c^3} - b + x$. Unde, cum similia sint triangula GAL, CBL, & propter hanc similitudinem, GA sit AL, ut CB ad BL, erit ut a ad $\frac{by^3}{c^3} - b + x$, ita y ad $\frac{by^3}{c^3} - b$; & proinde Curvæ æquatio fiat $\frac{by^4}{c^3} - by + xy = \frac{aby^3}{c^3} - ab$; sive $y^4 - c^3y + \frac{c^3xy}{b} = ay^3 - ac^3$; quæ ad quatuor dimensiones ascendat; indicio est, Curvam descriptam esse ejusdem generis secundi, ad quod refertur Parabola illa, qua planum supponitur terminari.

Fig. 59.

Denique Cartesius in fine Libri secundi Geometriæ quatuor Ovalium explicationem subjungit, quas ad Catoptricæ, & Dioptricæ Theoriam utiles is judicavit. Et quod quidem attinet ad primam; modus quo ea commode describi potest, talis est. Sumantur in recta linea FG tria quævis puncta F, A, G, ita ut portiones AF, AG eam inter se habeant proportionem, quam volumus. Tum ex puncto F, tanquam centro, descripto Circulo quovis MN, cujus intervallum majus sit, quàm FA, abscindatur ex ipsa AG portio altera AO, quæ minor sit, quàm AM in data quavis proportione; ac denique ex puncto G tamquàm centro, intervalloque GO describatur Circulus alter ON; qui, cum secet priorem ab utraque parte lineæ AG in punctis N, erit utrumque ex numero eorum, per quæ Ovalis quæsita transire debet. Et, si porrò ex puncto F describatur Circulus alter, qui pertranseat aliquantulum ultra citrave punctum M, veluti per punctum P; sumptâque AQ, quæ minor sit, quàm AP in eadem illa ratione, qua AO minor assumpta fuit quàm AM; describatur ex puncto G Circulus alter, qui transeat per punctum Q; intersectiones horum Circulorum dabunt alia duo puncta Ovalis quæsitæ. Atque eadem ratione cetera alia puncta invenientur. Fig.60.

Unde patet, primæ hujus Ovalis eam esse naturam, ut si in ejus perimetro sumantur duo quævis puncta N, & R, & jungantur tàm rectæ FN, FR, quàm rectæ GN, GR, incrementa rectarum FN, FR super recta FA sint inter se ut decrementa rectarum GN, GR a recta GA. Nam si centro F describantur Circuli NM, RP, & centro G describantur Circuli alii NO, RQ, erunt AM, AP incrementa rectarum FN, FR super recta FA; & AO, AQ decrementa rectarum GN, GR a recta GA. Sed per ejus descriptionem AM est ad AO, ut AP ad AQ; igitur erit etiam, permutando, ut AM ad AP ita AO, ad AQ; proptereaque incrementa rectarum FN, FR super recta FA eam inter se rationem habebunt, quam habent decrementa rectarum GN, GR a recta GA.

Quod verò spectat ad secundæ Ovalis descriptionem; ibi nulla quidem alia differentia occurrit, quàm quod portiones AO, AQ ipsis AM, AP proportionales, sumi debeant ex altera parte puncti A; ita ut radii Circulorum, qui ex puncto G describuntur ad eas secandas, quique ex centro F per puncta M, & P descripti sunt, sint æquales ipsi GA unà cum portionibus AO, AQ, uti subjectum Schema nobis id exhibet. Proindeque alterius hujus Ovalis ea erit natura; ut si ad duo quævis ipsius puncto N, & R ducantur tàm rectæ FN, FR, quàm rectæ GN, GR, incrementa ipsarum FN, FR super recta FA sint semper proportionalia incrementis aliarum GN, GR super recta GA. Nam, descriptis tàm centro F Circulis MN, RP; quàm centro G Circulis NO, NQ, erunt AM, AP incrementa rectarum FN, FR super recta FA; & AO, AQ incrementa rectarum GN, GR super recta *G*A; atque adeò, cùm sit ut AM ad AO, ita AP, ad AQ; erit etiam, permutando, ut AM ad AP, ita AO ad AQ; & consequenter incrementa rectarum FN, FR super recta FA, erunt inter se, ut incrementa rectarum GN, GR super recta GA. Fig 61.

Porrò quod spectat ad tertiæ, & quartæ Ovalis descriptionem, ea non in alio differt a descriptione primæ, & secundæ, nisi quod punctum F (*eadem Figura*) sumi debeat medium inter puncta G, & A; ita ut utrumque punctorum F, & G inter Ovales describendas reperiatur; cum tamen in prima, & secunda solum punctum G existat intra ipsas,

Fig. 62. ipsas, & alterum F extra easdem, sed in eadem linea AG positum maneat. Nam ceteroquin quantùm ad tertiam, descriptio eadem plane ratione perficienda est, ac in secunda; si descripto ex centro F Circulo quovis MN, cujus intervallum FM majus sit quàm FA, describatur ex puncto G Circulus alter ON, cujus intervallum GO majus quoque sit, quàm GA; sed ita tamen ut excessus AO minor sit quàm AM in data quavis ratione. Quandoquidem puncta intersectionum N horum Circulorum erunt in Ovali quæsita. Et quantùm ad quartam, descriptio perfici debet eadem ratione, ac in prima:
Fig. 63 nempe, si descripto itidem ex centro F Circulo quovis MN, cujus intervallum FM majus sit, quàm FA; describatur ex puncto G tamquam centro Circulus alter ON, cujus intervallum GO minus sit quàm GA; sed ita tamen ut defectus AO minor sit quàm AF in data semper ratione; quia horum Circulorum intersectiones erunt in hac alia Ovali; atque ità porrò utriusque Ovalis puncta alia invenientur.

Unde primò tertiæ Ovalis ea erit natura, ut
Fig. 62 sumptis in ejus perimetro duobus punctis N, & R; atque etiam ductis tàm rectis FN, GN, quàm rectis FR, GR, incrementa rectarum FN, FR super recta FA sint invicem, ut incrementa rectarum GN, GR super recta GA. Nam per ejus descriptionem incrementa rectarum FN, GN super rectis FA, GA sunt invicem in data ratione, in qua ratione sunt etiam incrementa rectarum FR, GR super iisdem rectis FA, GA: quare, ex æqua ratione, incrementa rectarum FN, GN super rectis FA, GA proportionalia erunt incrementis rectarum FR, GR super iisdem rectis FA, GA: atque adeò, permutando, incrementa rectarum FN, FR super recta FA sunt invicem, ut incrementa rectarum GN, GR, super recta GA.

Et

Et secundò quarta Ovalis eam habebit naturam;
ut, sumptis itidem in ea duobus punctis N, & R; ductisque etiam tam rectis FN, GN, quàm rectis FR, GR; incrementa rectarum FN, FR super recta FA proportionalia sint decrementis rectarum GN, GR super recta FA. Nam incrementum rectæ FN super recta FA est, per ipsius descriptionem, ad decrementum rectæ GN à recta GA in data ratione, in qua ratione est etiam incrementum rectæ FR super recta FA ad decrementum rectæ GR a recta GA; quare erit, ex æqua ratione, ut incrementum rectæ FN super recta FA ad decrementum rectæ GN a recta GA; ita incrementum rectæ FR super eadem recta FA ad decrementum rectæ GR ab eadem rectæ GA; atque adeò, permutando, incrementa rectarum FN, FR super recta FA proportionalia erunt decrementis rectarum GN, GR a recta GA. Atque hæ sunt quatuor Ovales Cartesii: quæ, etiamsi ejusdem ferme naturæ videantur; tamen sunt eæ quidem quatuor diversorum generum; quorum unumquodque, uti idem Auctor advertit, infinita alia genera sub se continet, & unumquodque rursus tot diversas species, quot efficit Ellipsium, aut Hyperbolarum genus. Etenim pro ut ratio inter lineas AM, AO, aliasque consistens diversa est, genus quoque subalternum harum Ovalium fit diversum. Deinde pro ut ratio inter lineas AF, AG mutatur, Ovales quoque cujusque generis subalterni specie mutantur: quæ etiam differre possent magnitudine, si scilicet, manente eadem proportione linearum AF, AG, assumantur eæ majores, vel minores. Nam ex harum linearum magnitudine, ceteris datis existentibus, ipsa quoque Ovalium magnitudo dependet.

Ceterum

Ceterum ipse **Cartesius monet, quòd, si** ratio linearum AM, AO fuerit æqualitatis; ita ut æquales fuerit ipsæ rectæ AM, AO, loco Ovalium primi, & tertii generis, describantur tantùm lineæ rectæ: sed loco secundi omnes Hyperbolæ; & loco ultimi omnes Ellipses. Nam in figuris primæ, & tertiæ Ovalis existentibus AM, AO æqualibus, ipsa duo puncta M, & O in unum, idemque punctum incidant necesse est ipsius rectæ lineæ GF; proindeque Circuli, qui describuntur ex punctis F, & G tamquam centris in illo unico puncto sibi invicem occurrent: atque idcirco per mutuum ipsorum contactum ipsam rectam lineam AG describent. At vero in figuris secundæ, & quartæ Ovalis, existente AO ipsi AM æquali; certo Circuli ex punctis F, & G tanquam centris descripti se intersecant in punctis N; sed per hanc æqualitatem nil aliud novi inducitur; nisi quòd in secunda Ovali differentia rectarum FN, GN fiat æqualis differentiæ rectarum FA, AG, quæ est proprietas umbilicorum Hyperbolæ; & in quarta Ovali summa earumdem rectarum GN, FN sit æqualis summæ rectarum FA, AG; quæ est proprietas umbilicorum Ellipsis.

Fig 60. 62.

Fig. 61. 63.

CAPUT

CAPUT VII.

Curvarum Geometricarum Exempla alia afferuntur.

ENarratis omnibus Curvis lineis, quæ a Cartesio in sua Geometria indicantur; nunc Curvarum Geometricarum exempla alia afferamus. Omnes verò, quæ fingi, aut excogitari possunt, exponere operis esset infiniti. Et primo quidem occurrit Curva, quam affert Jacobus Ozanamus in sua Geometria Practica, & quam Quadratricem vocat Geometricam, quòd ad Circuli quadraturam non parum ducit, licet ad Veterum Cissoidem quàm proximè accedat. Atque ejus ita quidem ortus efformatur. Fig. 64. Si super recta AB tamquam diametro descripto semicirculo ADB, ductâque per centrum C perpendiculari DC, agatur ex puncto B ad ejus circumferentiam recta quævis BE, ac ex puncto E demittatur perpendicularis altera EM, quæ extendatur usque in N, ut sit portio MN æqualis portioni CF, quam ducta recta linea BE abscindit ex priori perpendiculari DC; sique hæc operatio sæpiùs iteretur, ut habeantur plures harum rectarum MN eodem semper modo determinatarum, prout ipsa Figura indicat; Curva ANN, quæ incipiens ex puncto A per earum extremitates transibit, quadratricem Geometricam Ozanamianam repræsentabit.

Ex quo patet hujus Curvæ eam esse proprietatem, ut ipsi AB ducta quavis perpendiculari EN, occurrente tàm semicirculo, quàm Curvæ in punctis

ctis E, & N; rectangulum EMN sub ordinatis Circuli, & ipsius Curvæ comprehensum æquale sit semper rectangulo CAM, quod fit ex radio AC in abscissam utrique ordinatæ communem AM. Siquidem ductâ ex puncto B ad punctum E rectâ BE, quæ ipsi DC occurrat in puncto F; per genesim hujus Curvæ erit ipsius ordinata MN æqualis abscissæ portioni CF. Modò propter similitudinem triangulorum BCF, BME. CF, est ad BC, sive CA, veluti ME ad BM: quare erit etiam ut MN ad CA, ita ME ad BM. Sed propter Circuli naturam, ME est ad BM, ut AM ad ME; igitur erit ex æqua ratione, ut AM ad ME, ita MN ad CA; proptereaque rectangulum sub mediis EMN æquale erit rectangulo sub extremis CAM.

Atque hinc etiam si alia ducatur recta linea GH ipsi AB perpendicularis, & tàm semicirculo, quàm Curvæ occurrens in punctis G, H; rectangulum EMN erit ad rectangulum GIH, ut AM ad AI. Quippè, cum rectangulum EMN æquale sit rectangulo CAM, & rectangulum GIH æquale rectangulo CAI; erit ut rectangulum EMN ad rectangulum GIH, ita rectangulum CAM, ad rectangulum CAI. Sed propter communem altitudine AC, rectangulum CAM est ad rectangulum CAI, ut AM, ad AI; quare erit, ex æqua ratione, ut rectangulum EMN ad rectangulum GIH, ita AM, ad AI. Fig.65.

Unde facile quoque erit æquationem invenire, quæ naturam hujus Curvæ nobis manifestet; nempè relationem, quàm habeant abscissæ AM cum suis correspondentibus ordinatis MN. Nam positâ AC $=a$, AM $=x$, & MN $=y$; erit per Circuli naturam EM $=\sqrt{2ax-xx}$. Unde, quia natura ipsius

Curvæ

Curvæ AN fert, ut rectangulum EMN æquale sit semper rectangulo CAM, erit $y\sqrt{2ax-xx}=ax$; sive $2ayy-xyy=aax$, æquatio quæsita.

Exinde verò uberrima nobis subnascitur ratio Curvas lineas describendi simul, & concipiendi, si circa diametrum AB descriptâ Curvâ quavis AEG, protrahantur ejus ordinatæ EM versus N, ut rectangulum EMN sit æquale semper rectangulo CAM; quod fit ex recta linea constanti AC, quam Parametrum, sive latus rectum nominare licet, in abscissam correspondentem AM. Nam hoc pacto procreabitur Curva alia ANN, quæ alia subinde, atque alia erit, ut alia, atque alia assumitur Curva linea generatrix AEG. Sed poterunt omnes Curvæ lineæ tali pacto descriptæ hac unica generali æquatione comprehendi $yz=ax$. Scilicet si positâ rectâ lineâ constanti AC $=a$; ponatur insuper ordinata Curvæ generatricis EM $=z$, ordinata Curvæ genitæ MN $=y$, & abscissa utrique ordinatæ communis AM $=x$. Quippè, cum per naturam Curvæ genitæ rectangulum EMN adæquet perpetuò rectangulum CAM; erit semper $yz=ax$: proindeque, ut Curvæ genitæ propria æquatio inveniatur, satis erit valorem ordinatæ Curvæ generatricis per abscissam x expressum in generali illa æquatione dumtaxat substituere. Fig.66.

Ut si ponatur primò, Curvam generatricem AEG esse hyperbolam æquilateram, cujus diameter transversa sit æqualis duplo ipsius AC; quia per naturam hujus hyperbolæ habetur $zz=2ax+xx$; atque adeò $z=\sqrt{2ax+xx}$; posito in æquatione

gene-

generali $yz = ax$, vice z hoc ipsius valore $\sqrt{2ax+xx}$, orietur $y\sqrt{2ax+xx} = ax$; sive $2ayy + xyy = aax$. Et facile cognosci ex ea potest, Curvam hanc genitam, quantum ad ipsius naturam, non in alio differre ab ea, quam affert Jacobus Ozanamus, nisi quòd terminus xyy, qui hic afficitur signo $+$, in æquatione alterius ejus Curvæ reperiatur affectus signo $-$. Et sciatur velim, quòd, quemadmodum Curva Ozanami ad quadraturam Circuli deducit, ita etiam hæc alia Curva genita quadraturam hyperbolæ continet: proindeque illam Quadratricem Circularem, hanc autem Quadratricem Hyperbolicam licet nuncupare.

Quòd si ponatur secundò, Curvam generantem AEG hac æquatione definiri [*ead. Fig.*] $zzz = 2axx + xxx$; ea erit hyperbola Cubica alterius speciei, etiam æquilatera; in qua scilicet latus rectum adæquat latus transversum. Et quoniam juxtà eam habetur $z = \sqrt[3]{2axx + xxx}$, posita in æquatione generali $yz = ax$, vice z hoc ipsius valore $\sqrt[3]{2axx+xxx}$, habebitur $y\sqrt[3]{2axx+xxx} = ax$; sive $2ayyy + y^3x = a^3x$ pro æquatione Curvæ genitæ ANN. Et si porrò Curva generatrix AEG definiatur hac alia æquatione $z^3 = 4axx + 4axx + x^3$, erit ea hyperbola Cubica prioris speciei itidem æquilatera: cumque juxtà eam habeatur $z = \sqrt[3]{4aax + 4axx + xxx}$; substituto in æquatione generali $yz = ax$, vice z hoc ipsius valore $\sqrt[3]{4axx + 4axx + xxx}$; orietur loco illius, hæc alia æquatio $y\sqrt[3]{4aax + 4axx + xxx} = ax$, sive $4aayyy + 4axyyy + xxyyy = aaaxx$; quæ naturam Curvæ genitæ AN designabit.

Sed animadversione hoc loco dignum existimo, quòd si Curva generatrix [*ead. Fig.*] AEG fuerit aliqua infinitarum Parabolarum superius a nobis descriptarum, Curva genita ANN sit etiam semper Parabola, & quidem ejusdem generis cum Parabola generatrice, sed tantùm specie ab ea differens. Nam si ex. gr. ponatur, Curvam generatricem AEG esse Parabolam Cubicam prioris speciei; ita ut, existente etiam recta AC ipsius parametro, sive latere recto, sit localis ipsius æquatio $z^3 = aax$; habebitur $z = \sqrt[3]{aax}$: atque adeò æquatio generalis $yz = ax$ mutabitur in hanc aliam $y\sqrt[3]{aax} = ax$. Sive $yyy = axx$, quæ naturam Parabolæ Cubicæ alterius speciei designat. Et si ipsa Curva generatrix fuerit altera ista Parabola, sitque localis ipsius æquatio $zzz = axx$, quia habetur $z = \sqrt[3]{axx}$, mutabitur eadem illa generalis æquatio $yz = ax$ in hanc aliam $y\sqrt[3]{axx} = ax$, sive $y^3 = aax$, quæ naturam Parabolæ Cubicæ denotat prioris speciei.

Ad-

Advertatur quoque velim, quòd ſi Curva AEG, conjungatur iterum cum ſua diametro AB in aliquo ejus puncto B, adeò ut claudat cum ea ſpatium AEBA, prout ſequens indicat figura; & per punctum B ducatur recta BD ipſi MN parallela; quòd, inquam, recta iſta linea BD ſit aſymptotus Curvæ geni-
Fig.67. tæ AN; nimirum ipſa Curva genita ſemper ad illam accedet; neque unquàm cum illa conveniet. Nam, cum natura Curvæ genitæ AN ſit ut rectangulum EMN adæquet ſemper rectangulum CAM; utique ordinata Curvæ generatricis erit ad abſciſſam AM, ut parameter AC ad ordinatam Curvæ genitæ MN: ſed in puncto B ordinata Curvæ generatricis EM omnino evaneſcit; atque ita infinities continetur in recta linea AB, ad quam pervenit abſciſſa AM; quare etiam recta linea AC continebitur infinities in ordinata correſpondenti Curvæ genitæ AN; proindeque ordinata ipſius Curvæ AN puncto B correſpondens infinitæ erit magnitudinis, atque adeò in infinita diſtantia lineæ Curvæ fiet occurrens.

Sed huic eidem methodo inſiſtendo, infinitos alios modus fingi poſſe Curvas lineas deſcribendi ſimul, & concipiendi, perſpicuum quidem eſt. Nam ex. gr. Si quemadmodum rectangulum EMN æqua-
Fig.68 le conſtituitur rectangulo CAM, fiat idem rectangulum EMN æquale AM quadrato; Curva genita AN in quacumque Curvæ generatricis hypotheſi diverſa ſemper erit ab ea, quæ procreatur ſecundùm modum antecedentem: quippè ſi ponatur, causâ exempli, Curvam generatricem AEG hac æquatione definiri $zz = 2ax + xx$; quæ deſignat Hyperbolam eſſe æquilateram primi generis; quia habetur $z = \sqrt{2ax + xx}$, poſito in æquatione generali

zy

$zy = xx$, quæ exprimit naturam Curvæ genitæ in quacumque Curvæ generatricis hypotheſi, vice z ipſius valore $\sqrt{2ax + xx}$, habebitur $y\sqrt{2ax + xx} = xx$, ſeu $2ayy + xyy = x^3$; quæ eſt æquatio Curvæ ipſius genitæ propria longè diverſa ab ea, quam paulo ante ſecundùm modum antecedentem deteximus.

Occurrunt ſecundo loco Hyperbolæ Recentiorum conſideratæ ad ſimilitudinem ipſius Hyperbolæ Apollonianæ, ſed tamen pro ut inter aſymptotos illa jacet. Fig.69.
Nam ex Elementis Conicis notum eſt, quòd, ſi intrà angulum BAC deſcribatur Curva aliqua NN talis naturæ, ut ductis ex punctis lateris AB rectis totidem MN ad ipſam Curvam NN, lateri alteri AC parallelis, ſint æqualia inter ſe rectangula omnia, quæ fiunt ex portionibus AM in rectas lineas correſpondentes MN; quòd, inquam, NN ſit eadem Hyberbola Apolloniana, quæ habet pro ſuis aſymptotis ipſa anguli lateri AB, AC. Et poſitâ AM $= x$, & MN $= y$, erit localis ejus æquatio, quando hoc pacto conſideretur, $xy = aa$; ſi omnia ea rectangula AMN æqualia ponantur quadrato, quod ſit ex recta linea conſtanti a.

Jam verò, quemadmodum hujus Hyperbolæ ea eſt proprietas, ut unumquodque rectangulum, quod Fig.70.
ſit ex abſciſſa AM in ordinatam correſpondentem MN æquale ſit quadrato, quod ſit ex data recta linea; ita Recentiores Hyperbolas alias in infinitum excogitarunt, in quibus non modo rectangulum ſub ipſis AM, MN comprehenſum adæquet quadratum datæ rectæ lineæ; ſed quodlibet productum, quod ſit ex duabus quibuslibet poteſtatibus ipſarum AM, MN, adæquat homogeneam poteſtatem alterius con-

ſtanftantis rectæ lineæ. Atque, retentâ eadem denominatione, poterunt omnes illæ Hyperbolæ hac unica generali æquatione designari $x^m y^n = a^{m+n}$, ponendo litteram m pro exponente potestatis abscissæ x, litteram n pro exponente potestatis ordinatæ y, & $m+n$ pro exponente potestatis rectæ lineæ constantis.

Eæ autem Hyperbolæ tametsi variorum sint generum, pro ut varia assumatur summa exponentium m, & n; cum dicantur primi generis, si summa illa binarium non excedat; generis secundi, si ad ternarium numerum ascendat; atque ita deinceps; attamen, retento eodem genere, sive eadem summa exponentium m, & n, Hyperbolæ illæ non semper specie mutabuntur, pro ut ipsi illi Exponentes seorsim mutantur. Quandoquidem longe abest, ut hic locum habeat regula illa, quod tot debeant esse species Hyperbolæ unius, ejusdemque generis, quot modis abscissa x cum ordinata y complicari potest; ut productum habeatur homogeneum potestati, quæ fit ex recta linea constanti a. nam ex. gr. eadem Curva, ad quam refertur æquatio $xyy = aaa$, exprimi quoque potest hac alia æquatione $xxy = aaa$. Nec proinde duæ istæ æquationes $xyy = aaa$, & $xxy = aaa$ duas species Hyperbolarum secundi generis constituent.

Etenim, si, quemadmodum puncta ipsius Curvæ NN referuntur ad asymptotum AB per rectas MN alteri AC parallelas, fiat, ut puncta eadem referantur ad asymptotum alteram AC per rectas alias NO, quæ ipsi AB sint æquidistantes; & ponatur ipsius Curvæ NN hanc esse proprietatem, ut solidum, quod fit ex abscissa AM in quadratum ordinatæ MN æquale sit Cubo datæ rectæ lineæ; ita ut

Fig 71.

ita ut, positis, ut supra, abscissâ AM $= x$; ordinatâ MN $= y$, & datâ rectâ lineâ $= a$, fit localis ipsius æquatio $xyy = aaa$: eadem Curva NN erit etiam locus alterius hujus æquationis $xxy = aaa$; si sumantur pro abscissis portiones AO; & pro ordinatis rectæ NO. Etenim, positis AO $= x$, & NO $= y$, quia æquales sunt tam rectæ AO, MN, quàm rectæ AM, NO; eadem Curvæ proprietas dabit hanc aliam æquationem $xxy = aaa$; proindeque perinde ac una est Hyperbola primi generis; ita etiam una est species Hyperbolarum secundi generis; sed quæ ob diversum respectum duplici exprimi potest æquatione.

Eadem ratione una etiam species est Hyperbolarum tertii generis. Nam, tametsi in hoc genere tres casus distingui possint, quos tres sequentes æquationes designant, $xy^3 = a^4$; $xxyy = a^4$; $x^3 y = a^4$; attamen, quia secunda æquatio $xxyy = a^4$ extracta ex utraque ejus parte quadratâ radice, reducitur ad hanc aliam $xy = a^2$, quæ est localis æquatio Hyperbolarum primi generis; & quia eadem Curva, quæ satisfacit primæ æquationi $xy^3 = a^4$, potest etiam satisfacere tertiæ æquationi $x^3 y = a^4$; licèt diverso respectu; si scilicet abscissæ, quæ priùs sumptæ erant in una asymptoto AB, [ead. Fig.] nunc in asympoto altera accipiantur AC; cum hoc pacto, quæ in primo casu erant abscissæ, nunc evadant ordinatæ; & quæ illic erant ordinatæ, nunc evadant abscissæ; hinc est, ut non nisi unica constituenda sit species Hyperbolarum generis tertii.

At verò genus quartum Hyperbolarum duas habet sub se species. Nam, cum in hoc genere quatuor

tuor occurrant variationes, quas denotant quatuor ſequentes æquationes, $xy^4 = a^5$. $xxy^3 = a^5$. $x^3yy = a^5$. $x^4y = a^5$; una ſpecies erit earum Hyperbolarum, quæ definiuntur alterutrâ harum æquationum, $xy^4 = a^5$. $x^4y = a^5$: & altera erit illarum Hyperbolarum, quæ una ex aliis duabus æquationibus $xxy^3 = a^5$. $x^3yy = a^5$, deſignantur. Nam, quòd una, eademque Curva ſatisfaciat utrique harum æquationum $xy^4 = a^5$. $x^4y = a^5$; perſpicuum quidem eſt: quandoquidem non in alio inter ſe differunt, niſi quòd in prima x ſit linearis; & y ad quartam dimenſionem aſcendat; cùm tamen in ſecunda ſit viciſſim y linearis; & x ad quartum gradum elevetur: proindeque, ſi abſciſſæ, quæ in primo caſu ſumptæ erant ex. gr. in una aſymptoto AB, in ſecundo ſumantur in aſymptoto alia AC; quia lineæ, quæ in primo caſu erant abſciſſæ, in ſecundo evadunt ordinatæ; & viciſſim lineæ, quæ in primo erant ordinatæ, nunc fiunt abſciſſæ; eadem Curva linea utrique caſui ſatisfaciet. Et eadem ratione demonſtrabitur, eandem lineam Curvam poſſe ſatisfacere utrique aliarum harum æquationum $x^2y^3 = a^5$. $x^3yy = a^5$. Quandoquidem ipſarum eadem, ac antecedentium eſt ratio. Ex his autem facile erit aliarum generum ſpecies omnes definire. Quare ſupervacaneum exiſtimo circa hanc rem plura ſubjungere.

Quod verò attinet ad omnium harum Hyperbolarum deſcriptionem; eæ methodo facili, & conſtanti, quæ in infinitum ſe extendat, deſcribi poſſunt. Nam primò quod ſpectat ad eas Hyperbolas, quæ

primas ſpecies omnium generum conſtituunt; quæque ideò ejuſmodi generali æquatione definiri poſſunt Fig. 72.
$x^m y = a^{m+1}$, vel etiam $xy^m = a^{m+1}$; methodus eas deſcribendi talis eſt. Sumatur in AB abſciſſa quævis AM, & ducatur ex puncto M recta MN alteri AC parallela, quæ ſi quidem ſit tertia proportionalis in ordine abſciſſæ AM, & alicujus rectæ lineæ conſtantis AD, erit punctum N in Hyperbola primi generis. Si verò ſit quarta proportionalis in ordine earumdem linearum AM, AD; erit in Hyperbola ſecundi generis: atque ita ſi fuerit ea ſucceſſivè in eadem progreſſione quinta, ſexta, & ſic deinceps proportionalis; reperietur ordine in omnibus primis ſpeciebus aliorum generum ſuperiorum.

Etenim poſitâ rectâ lineâ conſtanti $AD = a$, abſciſsâ $AM = x$; & ordinatâ $MN = y$; ſi quidem primò ordinata MN fuerit tertia proportionalis in ordine linearum AM, AD; erit ut x ad a, ita a ad y; proindeque facta mutua mediorum, ac extremorum multiplicatione, orietur æquatio $xy = aa$. quæ naturam primi generis Hyperbolarum deſignat. Sed ſi eadem ordinata MN fuerit quarta proportionalis relatè ad eaſdem AN, AD; erit ut x ad a, ita $\frac{aa}{x}$ ad y; atque adeò $xxy = aaa$, quæ naturam Hyperbolarum ſecundi generis denotat; atque ità porrò, ſi fuerit quinta proportionalis, erit ut x ad a, ita $\frac{aaa}{xx}$ ad y; ac proinde Curvæ æquatio erit $x^3y = a^4$, quæ deſignat Hyperbolas omnes tertii generis: atque ità deinceps.

Possunt etiam hæ Hyperbolæ per infinitas Parabolas describi, quæ sint etiam primæ speciei cujusque generis; scilicet, si descriptâ circa rectam AB tanquam diametrum Parabolâ AP, quæ sit ejusdem generis cum Hyperbolâ describendâ, sed verò primæ speciei; & cujus parameter sit recta linea data AD; sumptâque abscissâ quavis AM; cujus ordinata correspondens in Parabola sit recta PM; fiat semper ut ea abscissæ AM potestas, ad quam ascendit in Parabola ordinata PM, ad ipsam ordinatæ PM potestatem, ita parameter AD ad quartam MN; nam erit punctum N in Hyperbola describenda. Quandoquidem, retentâ eadem denominatione, erit per naturam Parabolæ, ut x^{m+1} ad $a^m x$, ita a ad y: atque ideò factâ, mutuâ mediorum, ac extremorum multiplicatione, erit $x^m y = a^{m+1}$; quæ est æquatio omnium Hyperbolarum describendarum generalis. Sed licèt concinna ejusmodi descriptio; tamen ad praxim nimis intricata deprehenditur: neque digna plane est, ut cum priori comparetur.

Fig. 73

Quod verò spectat ad descriptionem aliarum Hyperbolarum; possunt eæ omnes facilè describi ope earum, quæ ad primas species generum omnium referuntur. Nam si describenda sit Hyperbola quarti generis, ad quam refertur æquatio $xxxyy = a^5$; describatur prius methodo jam traditâ Hyperbola ejusdem generis, ad quam refertur æquatio $x^4 z = a^5$. Et si eam repræsentet Curva linea OO, ita ut AM sit ejus abscissa x, & OM ejusdem ordinata z; protrahaturque OM, usque ad N, ut sit MN media proportionalis inter ipsas AM, OM, erit MN ordinata y Hyperbolæ quæsitæ eidem abscissæ AM correspondens. Etenim, cum Hyperbola OO definiatur ex hypothesi hac æquatione $x^4 z = a^5$; erit $z = \frac{a^5}{x^4}$: proindeque, quia AM est ad MN, ut MN ad OM; sive x ad y, uti y ad $\frac{a^5}{x^4}$; idcirco probè erit $yy = \frac{a^5}{x^3}$, sive $xxxyy = a^5$; quæ est æquatio ad Hyperbolam quæsitam.

Fig. 74

Nec dissimiliter, si describenda esset Hyperbola sexti generis, quæ sequenti æquatione definiatur $x^5 yy = a^7$; quoniam descriptâ Hyperbolâ OO (*ead. Fig.*) circà asymptotos AB, AC, ita ut, positis AM $= x$, & OM $= z$, sit localis ipsius æquatio $x^6 z = a^7$; fiet, si protrahatur ipsius ordinata OM usque ad punctum N, ipsa MN media proportionalis inter ipsas AM, OM, erit eadem MN ordinata y Hyperbolæ quæsitæ correspondens eidem abscissæ AM. Nam, cum sit $x^6 z = a^7$, erit $z = \frac{a^7}{x^6}$; unde quia AM est ad MN, ut MN ad OM, erit ut x ad y, ita y ad $\frac{a^7}{x^6}$; proindeque erit $yy = \frac{a^7}{x^5}$; sive $x^5 yy = a^7$. Quæ est æquatio Hyperbolæ describendæ.

Denique, ut Curvarum Geometricarum exempla alia proferamus, adducemus Curvas quamplures, quæ ex Circulo ortum habent; & quæ usui esse possunt, quòd facilè sit eas deducere ad descriptionem. Fig. 75. Concipiatur itaque Circulus ADBE, cujus centrum sit C, & diameter recta AB. Tum sumptâ in ipsa AB abscisâ quavis AM; repræsentet OM ordinatam ei in Circulo correspondentem; ex qua abscindatur portio MN, quæ sit ad ipsam OM, ut est portio CM centro, & ordinatâ intercepta ad semidiametrum CA: & si idem fiat respectu cujuslibet abscissæ AM, ita ut habeantur plures harum portionum MN; pertrasibit per ipsarum extremitates Curva linea ANN; quæ per æquationem definitur

$aayy = 2aaax - 5aaxx + 4axxx - x^4$, positis abscisâ $AM = x$, ordinatâ $MN = y$, & semidiametro $AC = a$. Etenim, cum juxta hanc denominationem sit ordinata Circuli $MO = \sqrt{2ax - xx}$,

& portio $CM = a - x$; vel etiam $= x - a$, erit per descriptionem hujus Curvæ, ut yy ad $2ax - xx$, ita $aa - 2ax + xx$ ad aa; atque idcirco $aayy = 2aaax - 5aaxx + 4axxx - x^4$.

Sed notetur velim, hujus Curvæ Figuram talem esse, qualem expositum exibet schema: nempe, ut constet duabus ex Ovalibus se invicem in centro C tangentibus, & quarum una transeat per extremitatem diametri A, & altera per extremitatem ejusdem
Fig. 76 diametri B: quippè, cum abscissa AM nulla fit, nulla quoque erit ordinata Circuli MO; atque ideò nulla etiam ejus portio MN: proindeque, quia abscissa AM fit nulla in vertice A, nulla erit ordinata Cur-

Curvæ puncto A correspondens: & consequenter per ipsum punctum A Curva transibit. At verò cum abscissa AM pertingit ad centrum C; quoniam evanescit portio CM, & per naturam Curvæ, CM est ad CA, ut MN ad MO; evanescet etiam MN relatè ad MO; atque ideò transibit Curva per punctum C. Et denique, si abscissa AM pervenit ad B, quia tum ordinata Circuli MO evanescit, & ad nihilum redigitur; evanescet etiam ipsa Curvæ ordinata MN; & consequenter Curva transibit per punctum B: quæ omnia ex ipsa æquatione perquamfacile deduci possunt. Nam in ea sive abscissa $x = o$, sive æqualis quantitati cognitæ a; sive etiam $=$ quantitati cognitæ $2a$; ipsa ordinata y semper evanescit, & nihilo fit æqualis.

Jam verò, si iisdem manentibus, fiat ut abscissa AM ad portionem centro, & ordinatâ interceptam Fig. 77.
CM, ita ordinata MO ad portionem MN; Curva, quæ transibit per extremitatem portionum MN, diversæ erit naturæ. Nam positis, ut supra, $AM = x$,

$MN = y$, $AC = a$; erit $MO = \sqrt{2ax - xx}$: et

portio $CM = a - x$; vel etiam $= x - a$. Unde, quia, per hypothesim, AM est ad CM, ut MO, ad MN, erit ut xx ad $aa - 2ax + xx$, ita $2ax - xx$ ad yy; atque ideò localis Curvæ æquatio erit $yyx = 2a^3 - 5aax + 4axx - x^3$.

Figura autem hujus Curvæ eadem est; quam hic repræsentamus: nempe primò erit ejus asymptotus recta linea AD per verticem diametri A suis ordinatis æquidistanter ducta.

Secundò Curva transibit per centrum C, in quo conjungitur cum alia, quæ simili ratione ex parte alte-

altera describitur: & denique utraque simul constituet Ovalem; quæ transibit per extremitatem alteram diametri B. Hæc omnia ex ipsa æquatione deduci possunt. Nam valor ordinatæ y evanescit, quotiescumque abscissa x, ponatur æqualis tàm quantitati cognitæ a, quàm quantitati cognitæ, $2a$: & redditur idem valor ordinatæ y infinitus, quotiescunque eadem abscissa x *zero* æqualis supponitur.

Verumtamen, quòd valor ordinatæ y evanescat in primo casu facile unisquisque deprehendet ipso calculo; cum, factâ substitutione utriusque valoris abscissæ x, pars altera æquationis evanescat. Sed non eadem facilitate cognosci potest; quòd in secundo casu, cum scilicet abscissa x ponitur æqualis *zero*, idem valor ordinatæ y infinitus reddatur. Quamobrem, ne ullus hic scrupulus remaneat; placet rem paullò clariùs ostendere. Et quidem, cum Curvæ æquatio sit $yyx = 2a^3 - 5aax + 4axx - x^3$; divisâ utraque parte æquationis per abscissam x, erit $yy = \frac{2a^3}{x} - 5aa + 4ax - xx$. Atque ideò positâ eadem abscissâ $x = 0$, quia duo ultimi termini secundæ partis æquationis omninò evanescunt, cùm in uno quantitas cognita $4a$ sit multiplicata per *zero*; & in altero reperiatur quadratum ipsius *zero*, erit eadem æquatio $yy = \frac{2aaa}{0} - 5aa$. At verò quantitas $\frac{2aaa}{0}$ est infinitæ magnitudinis, cum designet relationem, quam habet *zero* ad quantitatem finitam $2aaa$; quæ quidem infinita est, cum *zero* infinities contineatur in quantitate finita $2aaa$; proindeque erit etiam infinitæ magnitudinis quadratum ordinatæ y; atque ideò infinita quoque ipsa ordinata y. Q.E.D.

Portò, si, existente eodem Circulo AOB, fiat ut subtensa AO ad ordinatam OM, ita abscissa AM ad portionem MN; punctum N erit in alia Curva; cujus sequens erit localis æquatio $2ayy = 2axx - xxx$, manentibus, ut suprâ, abscissâ $AM = x$, ordinatâ $MN = y$, & radio $AC = a$. Quippe, cum subtensa AO media sit proportionalis inter diametrum AB, & portionem AM, erit $AO = \sqrt{2ax}$. Est autem, per naturam Circuli, $OM = \sqrt{2ax - xx}$; igitur, cum sit, ex hypothesi, ut AO ad OM, ita AM, ad MN; erit ut $2ax$ ad $2ax - xx$; sive ut $2a$ ad $2a - x$; ita xx ad yy; atque ideò Curvæ æquatio erit, $2ayy = 2axx - xxx$. Et perspicuum est, Curvam istam esse Ovalem, quæ per extremitates diametri AB transit. Nam in ipsa æquatione sive abscissa x ponatur $= 0$, sive etiam $=$ quantitati cognitæ $2a$; semper valor ordinatæ y evanescet, & ad nihilum redigetur. Fig. 78.

Denique, si in eodem Circulo fiat ut AM ad AC, ita OM ad MN, invenietur punctum N in alia itidem Curva; cujus natura per hanc æquationem definietur, $xyy = 2aaa - aax$; positis semper, ut suprà, $AM = x$; $MN = y$, & $AC = a$. Quippè, cum sit per naturam Circuli, ipsa $AM = \sqrt{2ax - xx}$; & ex hypothesi, AM sit ad AC, ut OM ad MN, sive etiam, permutando, ut AM ad OM, ita AC ad MN; erit ut xx ad $2ax - xx$; sive ut x ad $2a - x$, ita aa ad yy; proindeque Curvæ æquatio erit $xyy = 2aaa - aax$. Et Figura hujus Curvæ erit eadem, quæ hic conspicitur; nam habebit ut asymptotum re- Fig. 79.

rectam lineam A D, ſuis ordinatis parallelam; & tranſibit per extremitatem alteram diametri A B; in qua conjungens ſe cum alia Curva, quæ in parte altera deſcribitur, Figurā cū ea Clypei repræſentabit.

Generationes quarundam Curvarum in Circulo exorientium per determinationem ad Circuli ipſiuſmet naturam ſpectantem inquiſivimus. Si Circulus aut in Ellipſim, aut in Hyperbolem pertranſeat, parva efficietur immutatio: & Curvæ genitæ natura nullo pacto varia erit. Nam erat ſupra [*pag.* 140. *Fig.* 75.] A O B Circulus, & Curva A N C generabatur per proportionem efficientem C M portionem intercepṫum centro, & ordinatâ MO Circuli, ad ſemidiametrum CA Circuli, ut M N, quæ erat abſciſſa in ipſa eadem ordinata M O, ad ipſam ordinatam MO. Fiat eadem proportio: & ſit A O B (ibidem) perimeter Ellipſis, aut Hyperbolis. Erit M O $=$

$$\sqrt{\frac{c\,ax \pm c\,xx}{a}}.$$

Si latus tranſverſum ſit quantitas a; & quantitas c latus rectum. Quare ſi fiant quæ ibi præſtita ſunt, eadem omnino Curva prodibit.

Accipiatur modò æquatio generalis omnium Circulorum infinitè progredientium; erit ea, retentis iiſdem ſignis, quæ ibidem ſunt; $y^{m+n} = x^m$ in $\overline{2a - x}^{\,n}$. Quare $y = \sqrt[m+n]{x^m \text{ in } \overline{2a - x}^{\,n}}$. Et

Fig. 80. MO fiat æqualis huic quantitati. Quare, inſtitutâ proportione juxta dictam conditionem Curvæ generandæ, & efformatâ æquatione, intelligetur confeſtim Curvæ genus inde promanans. Unum exemplum eſto.

Sit

Sit $m = 1.$ et $n = 2.$ erit $yyy = 4aax - 4axx + xxx$. Qui Circulus eſt cubicus prioris ſpeciei. Igitur erit

$$MO = \sqrt[3]{4aax - 4axx + xxx}:$$

& Curva generabitur per dictam conditionem; adhibitis modo y ad denominandas ejus abſciſſas, $x^6 - 7ax^5 + 19aax^4 - 25a^3x^3 + 13a^4xx - 4a^5x - a^3yyy = 0$. Et ita de reliquis.

Quòd ſi æquatio etiam generalis ſumatur Ellipſium, & Hyperbolarum omnium infinitè procedentium, $y^{m+n} = \frac{c}{a}x^m$ in $\overline{a \pm x}^{\,n}$; eædem quoque Curvæ generabuntur, quæ per Circulos infinitè procedentes creantur, poſitis conditionibus, quæ ſupra enunciatæ fuerunt: ſicuti id diximus de primo Circulo commuṅi evenire.

Sed verò ſit A O perimeter lineæ rectæ in dato triangulo A C E; & quæratur Curva A N C eadem conditione genita; ita ut, accepto puncto quovis M in A C latere trianguli, & ductâ M N ordinatâ, ſeu parallelâ CE; ſit CM, (uti ſupra pag. 140.) ad CA; veluti MN ad O M. Fig. 80. Dicantur A C $= a$. C E $= b$. Abſciſſæ A M $= x$. Et ordinatæ M N Curvæ quæſitæ $= y$. Erit C M $= a - x$. Et propter ſimilia triangula A C E, A M O; erit M O $= \frac{bx}{a}$. Sed per adpoſitam conditionem habetur; $y. \frac{bx}{a} :: a - x. a.$ Quare Curva genita erit Parabola Apolloniana.

aay

$\frac{aay}{b} = ax - xx$. Cujus figura est, ut pertranseat per A, & C puncta. Etenim cum AM (x) fit AC $= a$; abscissæ MN (y) evanescunt; nam tum in æquatione modò inventâ fiunt ipsæ $y = o$: Item evanescunt MN (y); quia tunc CM fit $= o$. Esse verò debet CM. CA :: MN. OM. Cùm verò ipsa eadem AM nulla est in A; profectò est quoque nulla ibi ipsa MN (y): quod per eamdem æquationem etiam cognoscitur. Ergo per A, & C transit Curva.

Fig. 81. Describetur autem sic; ideft positio diametri, & quantitas parametri ita determinabitur. Producatur AE ad B, ex parte A: & sit in AB portio AB $=$ dimidio AC $= \frac{a}{2}$. Ex B agatur BD ad quemvis angulum, sed non parallelè AC. Et sit in BD portio BD æqualis quartæ parti CE $= \frac{b}{4}$. Ex A agatur AGI parallela BD. Erit AGI diameter Curvæ. Cujus parameter $= \frac{aa}{b}$. Et ordinatæ parallelæ BA: & vertex A: origo verò abscissarum erit D. Demonstratur. Nam accepto in DB puncto quovis F; si ex F ducatur FGQ parallela AB secans in G ipsam AGI, & Curvam in Q; si porrò agatur etiam ex D parallela DH ipsi eidem AB, occurrens in H cum AGI; dicanturque DF y; & FQ x; quia est GQ $=$ FQ $-$ FG $= x - \frac{a}{2}$; & AG $=$ HA $-$ HG, sive $=$ DB $-$ DF $= \frac{b}{4} - y$; atque est GQ^2 $=$ AG in parametrum; erit quidem $xx -$

ax.

$ax + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} - \frac{aay}{b}$; sive $\frac{aay}{b} = ax - xx$.

Quæ æquatio est inventa. Q. F. O.

Si verò rectam AC sumere velis ex alia parte relate ad A; & sit Ac; eodem modo aliam Parabolam Anc ejusdem prorsus naturæ eo loci obtinebis, & describere poteris, si illa maneant, quæ modò dicta sunt. Etenim sit in Ac abscissa Am; & ex m ordinata mo occurrens AE productæ in o. Erit Am $= -x$. & cA $= -a$. Quare cm ($=$ cA $-$ mA) erit $= -a + x$. Erit verò mo eadem ratione $= \frac{bx}{a}$. Nam AC. CE :: Am. mo. Sive $a.b :: -x. -y$. Et per conditionem esse debet; $-y. \frac{bx}{a} :: x - a. -a$. Et reliqua patent. Et AGI producta ad aliam partem dabit Ag diametrum parallelam bd, quæ ducta parallela est ipsi BD ex puncto b, uti facta est Ab $=$ AB. Et eadem erit parameter. Et bd $=$ BD $= \frac{b}{4}$. Et ordinatæ parallelæ Ab; & d origo abscissarum. Describetur autem alia pars AP, seu Ap Parabolæ utriusque eodem modo, si triangulum ACE, constituatur ex alia parte relate ad AC. Et AE producatur ex parte A: & Amo, constituatur quoque ex parte alia relate ad Ac. Et cetera perficiantur, uti supra. Cum autem Triangulum generans infinitè extendi possit, liquet utramque Parabolam in infinitum extendi, productis semper pro alia parabola ipsis AC, AE ad Ac, Ao.

Tandem (*ead. Fig.*) si loco positæ proportionis $y. \frac{bx}{a} :: a-x. a$, sumantur aliæ, atque aliæ rationes tertii, & quarti termini proportionis: & sit eadem perimeter AE lineæ rectæ in triangulo ACE: ceteraque ponantur uti supra; aliæ etiam atque aliæ, novæque Curvæ semper generabuntur. Ita si fiat; $y. \frac{bx}{a} :: aa-2ax+xx. aa$; Curva genita erit $x^3 - 2axx + aax = \frac{aaay}{b}$. Quòd si tota proportio immutetur, sed sit idem Triangulum, & eadem perimeter AE; fiatque ut sit AM. CM :: MO. MN. Et reliqua maneant, uti supra; & eadem denominatio quantitatum retineatur; habebitur $x. a-x :: \frac{bx}{a}. y$. Et linea solum recta exorietur. Verùm si imperetur, ut AM. CM :: $MO^2. MN^2$; nimirùm $x. a-x :: \frac{bbxx}{aa}. yy$. Curva promanabit Ellipsis Apolloniana; cujus latus transversum ipsamet AC; & latus rectum tertia proportionalis in ordine AC, & CE. Et reliqua erunt de hac Ellipsi dicenda, quæ dicta modo sunt de Parabola, tum pro Curvæ descriptione; tum pro complemento Curvæ AP ex alia parte AC; cùm etiam tandem pro alia æquali Ellipsi, quæ ex alia parte relate ad A describetur. Quòd si vero, iisdem manentibus, fiat $x. a+x :: \frac{bbxx}{aa}. yy$; erit Hyperboles procreata AN extra Triangulum, seu perimetrum AE procedens; non quidem per C pertransiens; ibi enim MN non sit æqualis *zero*; sed ejus quadratum duplo quadrato CE in eo puncto est æquale: verùm idem erit Hyperbolæ latus transversum, idem latus rectum, quod fuit Ellipsis; & A vertex ejus; & AC diametri positio. Et reliqua uti in Ellipsi, & Parabola.

Sed si perimeter ipsa eadem AE sit Parabolica; cujus parameter p; & ordinata sit MO; abscissaque AM; & in diametro AD Parabolæ sit AC sumpta portio determinatæ quantitatis $= a$. Si modò quæratur Curva per proportionem genita, AC. CM :: $AM^2. MN^2$; localis æquatio invenietur, retentâ eadem denominatione pro abscissis, & ordinatis, $\frac{apx - pxx}{a} = yy$; habetur enim $a. a-x :: px. yy$. Quare Curva erit Ellipsis communis pertransiens per puncta A, & C; & ejus latus transversum est quidem ipsamet AC; parameter verò communis cum parametro Parabolæ. Quod si instituta proportio sit $AC. AC+AM :: AM^2. MN^2$; $a. a+x :: px. yy$. Hyperboles generabitur $\frac{apx + pxx}{a} = yy$, incedens extra AE perimetrum Parabolæ; cujus quidem vertex A; sed non per C pertransiens; nam in C, ubi AM [x] est AC (a), fit quidem MN^2 [yy] $= 2pa$. Sed idem latus transversum, & idem latus rectum erit, quod Ellipsis modò determinatum. Et AC diametri positio. Si verò, iisdem manentibus, fiat in eadem Parabola, ut sit proportio OM. MN :: CA. CM; uti supra in Circulo effectum fuit pag. 140. pro-

Fig. 82.

progignetur Curva $\frac{aayy}{p} = aax - 2axx + xxx$. ejusdē generis, sed non speciei, cum Curva modo inventa pag. 148. in perimetro AF lineæ rectæ Trianguli ACE; si fieret in ea perimetro MO . MN : : CM^2 . AC^2. Et Curva per puncta A, & C pertranseat necesse est; uti ibidem.

Porrò eodem modo, ac de linea recta dictum est; aliæ, atque aliæ Curvæ, novæque generabuntur in Parabola Generatrice eadem, si termini proportionis immutentur; unde Curva promanat: vel immutatione illatâ solius dimensionis in terminis duobus proportionis, ita ut vel simplex sit dimensio, vel secunda, seu quadrata, vel tertia, seu Cubica, & ita de reliquis; vel etiam immutatione inductâ naturæ totius proportionis. Exemp. gr. proportio (*ead. Fig.*) AC . CM : : MO . MN, unde Curva progignitur in Parabola ex dictis; immutata erit in sola dimensione duorum terminorum, si fiat AC . CM : : MO^2 . MN^2; vel : : MO^3 . MN^3.; vel : : MO^4 . MN^4: & ita de reliquis: vel etiam MO . MN : : AC^2 . CM^2; aut : : AC^3 . CM^3; vel : : AC^4 . CM^4: & ita de reliquis. Immutatio verò fiet naturæ totius proportionis; si sit AC . CM : : MN . OM. Et termini duo hujus ejusdemmet proportionis in sola dimensione poterunt quoque eodem modo, quo supra hic nuper effectum est, immutari. Quibus omnibus casibus novæ semper Curvæ creabuntur. Quòd si immutentur Parabolæ generatrices, quarum omnium infinitè procedentium æquatio generalis, & communis est, acceptâ p pro parametro, p^m

$p^m x^n = y^{m+n}$; novæ etiam juxta diversas Parabolas enascentur Curvæ: & novæ etiam in unaquaque Parabola generatrice Curvæ comparabuntur, si modò dictæ immutationes adhibeantur. Atque etiam non modo in Parabola, & in linea recta generatricibus, sed item & in Circulo, & in Ellipsi, & in Hyperbola generatricibus Curvarum, de quibus diximus, novæ semper progignentur Curvæ, si expositæ varietates adhibeantur, aut Curvæ generantis, aut proportionis, vel totius, vel duorum terminorum, per quam proportionem nova Curva inquiratur.

Sit Parabola AOG, cujus axis ABC, parameter $= a$. Sit verò ejus chorda AO. Et ex O ordinatim ad axim sit posita OM. Quæritur Curva AF, quæ pertransit per puncta N; si sint semper AO . OM : : AM . MN. Dicantur AM $= x$. MN $= y$. Erit $MO^2 = ax$ Et $AO^2 = xx + ax$; quare habebitur per conditionem, $xx + ax . ax : : x^2 . y^2$. Et localis Curvæ æquatio erit $axx = xyy + ayy$. Quod si, iisdem positis, in ejusdem Parabolę diametro ABC abscissa sit data portio AB $= b$. Et Curva PEK quæratur pertransiens per puncta P, si imperetur proportio AM . AB : : OM . MP; quę MP sit y; Curva gignetur $abb = xyy$. Cujus figura est LDE. Nam MP(y) valorē habet infinitū in puncto A. Ibi enim AM (x) fit $= o$. Ergo $aab = xyy$; sive $\frac{aab}{x} = yy$, fit $\frac{aab}{o} = yy$. Quare y habet in A valorem infinitum. Hinc Curva in A habet asymptotum AQ parallellam ex A ductam ordinatis. Non verò per B permeabit; ibi enim tunc y non evanescit. Immò magis ejus quadratum fit $= ab$. Quare Curva genita secans erit tum Parabolę generatricis in puncto D, ad quod ducta est ordinata BD ex ipso eodē puncto B. Et hinc ulterius ea progressa intra perimetrum Parabolę incedere debet; nam antea extra ferebatur. Quod ipsamet proportio etiam indicat, Fig. 83.

cat,

cat, per quam ea genita manet. Sed & nec axi ABC poteſt Curva ipſa uſpiam occurrere. Igitur AQ, AC ejus ſunt aſymptoti duę. Et quidem hyperboles ea eſt generis ſecundi; (ſupra pag. 134. & 137.) cujus hyperbolis per datum punctum D pertranſeuntis non inelegans eſſe poſſet, quam modò poſuimus, deſcriptio.

Hæ duæ inſtitutæ proportiones, ſimiles ſunt duabus illis proportionibus, per quas ſupra *pag.* 144. in Circulo generabatur Curva illa Ovalis, & Clypeoformis. Sed, retentâ eadem conditione chordę, immuta Curvam genitricem; immuta, ut libet, aut in ipſa eadem Parabola, & in Parabolis infinitis, aut in aliis ſingulis quibuſvis generantibus Curvis dimenſionem terminorum duorũ proportionis; immuta tandem totam proportionem, novæ ſemper Curvę generabuntur. Profectò hæc omnia poſtremo loco de generatione varia, & multiplicis generis Linearum Curvarum Geometricarum eum ob finem paullò fuſiùs diſputavimus; ut noſcatur quanta facilitate Curvæ Geometricæ mente intelligi poſſint; ac poſſint illarum comparari generationes. Ita quidem uberrima copia ſubnaſcitur harum Curvarum generandarum per ea, quæ tradidimus: & longè etiam ſimpliciores ejuſmodi viæ ſunt, quàm illæ, quas præbuit Inſtrumento ſuo Carteſius ſupra expoſito; quod & non ita facilè percipitur, quantùm ad operandi modum, & valdè operoſo indiget apparatu. Verùm eò Curvę aliquãdo ſimpliciores prodire ſolent; licèt localē æquationem habeant magis compoſitam; quò majores conditiones adponuntur problemati indeterminato, per quod Curva ipſa generatur. Exemplum unum prodeſſe juvabit.

Fig. 84. Sit data poſitione recta linea AQ, datumque in ea punctum A; lineam invenire, ad quam ductis ex A lineis AP, AO in angulo PAO dato, ac demiſſis ex punctis P, O lineę quæſitæ normalibus PM, OF ad AQ, eam ſecantibus in M, & F; ſit ratio AP, ad AO data, & tres AP, AO, AF, continuè proportionales. Ponatur jam factum eſſe, quod quæritur: & productis AP, AO ex parte A, acceptâque AD

datâ,

datâ in AP productâ, conſtituatur triangulum ADC rectangulum in D. Producta DC ſecet AQ in *B*. Et ex *B* demittatur normalis *B*H, ad AC. Sint dictæ AM $= x$; MP $= y$, & cognitæ AD $= a$; AC $= b$. CD $= c$; ratio verò data dicatur m, ad n. Eſt AM. MP :: AD. DB. ſeu $x. y :: a. \frac{ay}{x} =$ DB. Quare BC $=$ BD $-$ DC $= \frac{ay - bx}{x}$. Item eſt AC. CD :: BC. CH, ideſt $b. c :: \frac{ay - bx}{x}. \frac{cay - cby}{bx} =$ CH. Et AH $= \frac{bbx + cay - cbx}{bx}$. Eſt autem bb major quàm cb in trianguli *A*DC lateribus: & fiat $bb - bc = gg$. Quare *A*H $= \frac{cay + ggx}{bx}$.

Modo eſt *A*P^2. *A*M^2 :: BA^2. *A*D^2. quæ in ſignis adpoſitis eſt; $xx + yy. xx :: B$A$^2. aa$. Quare *B*A$^2 = \frac{aaxx + aayy}{xx}$. Porrò ob conditionem rationis datæ, eſt *A*P^2. *A*O^2 :: $mm. nn$. Igitur *A*O$^2 = \frac{nnxx + nnyy}{mm}$. Atqui eſt; *B*A^2. *A*H^2 :: *A*O^2. *A*F^2.; ideſt in inventis valoribus; $\frac{aaxx + aayy}{xx} . \frac{\overline{cay + ggx}^2}{bbxx} :: \frac{nnxx + nnyy}{mm} . \frac{\frac{xx}{nn}}{aammbb}$ in $\overline{cay + ggx}^2$. Igi-

V tur

tur $AF^2 = \frac{nn}{aammbb}$ in $\overline{cay+ggx}^2$. Et idcircô $AF = \frac{n}{amb}$ in $\overline{cay+ggx}$. Ob aliam verò conditionem, esse debet $\sqrt{xx+yy} . \sqrt{\frac{nnxx+nnyy}{mm}} :: \sqrt{\frac{nnxx+nnyy}{mm}} . \frac{ncay+nggx}{amb}$. Quare $\frac{nnxx+nnyy}{mm\sqrt{xx+yy}} = \frac{ncay+nggx}{amb}$. Et $\frac{n}{m}\sqrt{xx+yy} = \frac{cay+ggx}{ab}$. Atque æqualia etiam erunt quadrata; unde $\frac{nnxx+nnyy}{mm} = \frac{ccaayy}{aabb} + \frac{2caggxy+g^4xx}{aabb}$. Sive $\frac{nnxx}{mm} - \frac{g^4xx}{aabb} = \frac{ccyy}{bb} + \frac{2cggxy}{abb} - \frac{nnyy}{mm}$. Tres adpositæ sunt conditiones anguli dati, rationis datæ, & proportionis continuæ. Et nosti quidem analyticum apparatum; quo in hac questione breviorem invenire nos analytice illam solvere volentes nequivimus. Attamen locus est ad lineam omnium simplicissimam; idest ad lineam rectam. Sive quantitates $\frac{nn}{mm} - \frac{g^4}{aabb}$, & $\frac{cc}{bb} - \frac{nn}{mm}$ ambæ sint quantitates positivæ; sive

ambæ

ambæ sint quantitates negativæ; sive alterutra earum sit positiva, & altera negativa.

Etenim sit alterutra earum positiva, sitque $\frac{nn}{mm} - \frac{g^4}{aabb}$. Et fiat $= \frac{f}{p}$. Altera verò sit negativa, idest $\frac{cc}{bb} - \frac{nn}{mm}$; & fiat $= -\frac{e}{b}$. Erit æquatio; $\frac{fxx}{p} = \frac{2cggxy}{abb} - \frac{eyy}{b}$. Sive; $yy - \frac{2cggbxy}{eabb} + \frac{ccg^4bbxx}{eeaab^4} = \frac{ccbbg^4xx}{eeaab^4} - \frac{bfxx}{ep}$. Qui locus est ad lineam rectam; uti liquebit, extractâ utrimque quadratâ radice. Hinc facile intelligetur in aliis casibus etiam locum esse semper ad lineam rectam. Angulus datus PAO in problemate positus est acutus: si rectus est locum non habet problema: si obtusus, eodem modo, mutatis, quæ debent immutari, procedet resolutio.

Nosti igitur plures adpositas fuisse conditiones; & problema, Lineamque extare simplicissimæ naturæ. Sit, iisdem positis, quæsita Curva per puncta P pertransiens [*ead. Fig.*] ex quibus, ductis PM normalibus ad *AQ*, sint solùm *AP*, *AM*, & alia data recta *q* continuè semper proportionales: jam linea Curva erit longè compositior antecedenti; $x^4 = qqxx + qqyy$. Id autem erat quod exemplo declarare volebamus. Utile quoque erit aliis Curvis uti pro generatione novæ Curvæ, ut simplicior modus sit generationis; & Curva obtineatur simplicior; veluti in nuper expositis generationibus Curvarum a nobis effectum fuit.

V 2 CAPUT

CAPUT VIII.

De Spirali Archimedea, & de aliis instar ipsius in infinitum efformatis.

NUnc aliud ingredimur Curvarum genus, quod scilicet Curvas Mechanicas, sive Transcendentes, vel etiam Geometrice irrationales complectitur: quarum puncta omnia minimè talem habent relationem ad puncta alia alicujus rectæ lineæ positione datæ, quæ per æquationem aliquam finitam ad omnia illa puncta se se extendentem possit definiri; licèt eadem illa relatio possit per infinitam æquationem, quæ scilicet ad infinitas dimensiones ascendat, designari. Et in ejusmodi quidem Curvis enumerandis eundem plane ordinem servabimus, quem in enumeratione Curvarum Geometricarum nobis proposuimus. Nempè primò afferemus Curvas Mechanicas a Veteribus Geometris consideratas; tùm deinceps eas subjungemus, quas Geometræ Recentiores meditati sunt.

Inter lineas verò Mechanicas a Veteribus Geometris excogitatas maximè valet Spiralis Archimedea; cujus generatio ante ipsum quoque Archimedem sequenti quidem ratione fuit a Geometris considerata. Intelligatur Rectæ lineæ extremum unum esse fixum, ac immobile; & extremum alterum motu æquabili in orbem cieri, donec redierit in idem punctum, unde incœperit moveri. Tum intelligatur eodem tempore motu etiam æquabili ab extremo ejusdem lineæ fixo, & immobili ferri punctum alterum super ipsa recta linea; quæ fertur in orbem; sed

sed ita tamen, ut ad alterum ejusdem lineæ extremum mobile eodem quoque tempore perveniat, quo extremum istud ad pristinum suum locum redierit. Nam alterum hoc punctum per compositionem utriusque motus tam scilicet lineæ, quæ in gyrum fertur, quàm ipsius puncti super ipsa recta linea mobili delati, describet lineam Curvam, quæ Spiralis nuncupatur. Unde Archimedes Spiralis genesim tradens inquit, *si in plano Recta Linea, altero termino manente, æquali velocitate circumlata redeat deinceps eò, unde profecta est: simul verò cum linea circumlata feratur punctum pari velocitate sibi ipsi secundùm rectam lineam ducto, motum initio ab immobili termino; istud punctum lineam Spiralem in plano describet*.

Verumtamèn ut genesis hujus Curvæ meliùs intelligatur, concipiatur Circulus BCDE, cujus centrum punctum *A*; sitque *A*B ejus semidiameter, quæ in gyrum agatur secundùm extremum B describens circumferentiam BCDEB, motu tamen æquabili; ita ut æqualibus temporibus æqualia quoque spatia percurrat: tum eodem tempore, quo extremum B moveri cœpit in gyrum, incipiat etiam moveri punctum aliud super rectam *A*B ab extremo immobili A in extremum mobile B, motu itidem æquabili; sed ita tamen, ut eodem tempore, quo alterum istud punctum pervenerit ad extremum mobile B, idem extremum *B* revolutione sua redeat ad eundem locum, unde erat profectum; atque adeò ipsa semidiameter *AB* ad eandem positionem sit reversa; jam punctum illud delatum per rectam *A*B propter motum suum æquabilem subiens quoque motum ipsius rectæ A B itidem ex hypothesi æquabilem, designabit utroque illo motu lineam Curvam *A*NB, quæ Spiralis dicitur: atque ejus origo sive principium dicitur ab Archi- Fig. 85.

chi-

chimede manens punctum *A*; & Principium, sive Origo circumlationis positio lineæ, a qua incipit semidiameter *AB* in gyrum ferri.

Ex ipsa autem genesi hujus Curvæ liquet, hanc ejus esse proprietatem præcipuam, ut, si ex centro *A* ducatur ad circumferentiam recta linea *AD*, quæ secet descriptam Spiralem in puncto N; ut, inquam, integra Circuli circumferentia B C D E B sit ad portionem ipsius BCD Principio circumlationis, & ductâ rectâ lineâ comprehensam, ut est semidiameter AB, sive *A*D ad portionem ipsius AN. Nam si integram circumferentiam divisam intelligamus in centum partes æquales, & in totidem quoque partes divisam intelligamus semidiametrum AB; eodem tempore, quo ipsa semidiameter *A*B percurrit partem unam peripheriæ, punctum delatum ex *A* in B percurret etiam partem unam ipsius *A*B; & similiter eodem tempore, quo eadem semidiameter AB percurrit ex. gr. partes decem circumferentiæ, idem punctum delatum percurret quoque partes decem ejusdem *A*B: proindeque integra circumferentia erit semper ad partem per semidiametrum percursam, ut est ipsa semidiameter ad portionem ipsius, quæ ab eodem puncto super ipsa delato percurritur. Unde, quia punctum delatum ex *A* in B portionem percurrit semidiametri *A*N eodem tempore, quo ipsa semidiameter percurrit portionem circumferentiæ BCD; consequens est, ut integra circumferentia BCDEB sit ad ipsius portionem BCD, veluti semidiameter *A*B, sive AD, ad ipsius portionem *A*N.

Fig 86 Atque hinc plura quidem deducuntur: nempe primo, integram Circuli circumferentiam BCDEB esse ad aliam ipsius portionem DEB, ut est semidiameter *A*B, sive *A*D ad portionem alteram ipsius DN; nam, cum sit ut integra Circuli circumferentta BCDEB ad portionem ipsius BCD, ita semidiameter AD ad portionem AN; erit etiam, dividendo, ut integra Circuli circumferenaia BCDEB ad portionem aliam DEB, ita semidiameter AD ad portionem alteram DN.

Secundò, quòd portio circumferentiæ BCD [*ead.Fig.*] sit ad portionem aliam DEB, ut est portio semidiametri Centro, & Spirali contenta *A*N ad portionem alteram DN. Etenim est ut portio Circumferentiæ BCD ad integram circumferentiam BCDEB; ita portio semidiametri *A*N ad ipsam semidiametrum AD. Sed integra circumferentia BCDEB est ad portionem aliam DEB, ut semidiameter AD ad portionem DN; quare erit ex æqua ratione, ordinando, ut portio circumferentiæ BCD, ad portionem aliam DEB, ita portio semidiametri AN ad portionem alteram DN.

Tertio, quòd si ducatur radius alter AME, [*ead.Fig.*] qui secet Spiralem in puncto M; portio circumferentiæ BCD ad portionem aliam BCDE sit ut est portio *A*N, ad portionem *A*M. Nam portio circumferentiæ BCD est ad integram circumferentiam BCDEB, ut est portio semidiametri *A*N ad ipsam semidiametrum *A*D. Sed integra circumferentia BCDEB est ad portionem ipsius BCDE, ut est semidiameter AD, sive AE, ad portionem ipsius AM; igitur erit ex æqua ratione, ordinando, ut portio circumferentiæ BCD ad portionem aliam BCDE; ita portio semidiametri AN ad portionem alteram AM.

Quartò, quòd, iisdem positis, portio circumferentiæ DEB, (*ead.Fig.*) sit ad portionem aliam EB, ut est portio semidiametri DN ad portionem alteram EM. Siquidem portio circumferentiæ DEN est ad integram circumferentiam BCDEB; ut est portio semidiametri DN ad semidiametrum ipsam AD.

AD. Sed integra circumferentia $BCDEB$ est ad portionem ipsius EB, ut est semidiameter AD, sive AE ad portionem EM. Quare erit ex æqua ratione, ordinando, ut portio circumferentiæ DEB ad portionem aliam EB, ita portio semidiametri DN ad portionem alteram EM.

Quinto; quòd si integra Circuli circumferentia dividatur in quotcunque portiones æquales [*ead. Fig.*] BC, CD, DE, EB; & ad puncta sectionum ducantur radii totidem AC, AD, AE, AB; occurrentes Spirali in punctis O, N, M, B; quòd, inquam, portiones horum radiorum AO, AN, AM, AB, centro, & Spirali comprehensæ Arithmeticam proportionem constituant. Nam portio circumferentiæ BC est ad portionem BCD, ut AO, ad AN; & portio similiter circumferentiæ BCD, est ad portionem BCDE, ut AN, ad AM; atque ita deinceps: quare portiones circumferentiæ BC, BCD, BCDE, BCDEB erunt inter se, ut portiones radiorum AO, AN, AM, A*B*; ac propterea, cum priores portiones sit in Arithmetica proportione; erunt etiam portiones secundæ Arithmeticè proportionales.

Et sexto denique, quòd, iisdem positis, sint etiam Arithmeticè proportionales portiones aliæ (*ead. Fig.*) radiorum CO, DN, EM, Circuli circumferentiâ, & Spirali comprehensæ. Nam portio circumferentiæ CDE*B* est ad portionem aliam DE*B*, ut CO, ad DN; & similiter portio circumferentiæ DE*B* est ad portionem aliam E*B*, ut DN, ad EM: quare portiones circumferentiæ CDE*B*, DE*B*, E*B* erunt inter se, ut portiones radiorum CO, DN, EM: proindeque, quia priores portiones sunt Arithmeticè proportionales, erunt quoque portiones secundæ in Arithmetica proportione.

Ex

Ex quibus facile modo est Spiralem in plano per puncta describere. Etenim, si Circuli cujuslibet circumferentia *B*CDE dividatur in partes quotcunque æquales, & ad singula puncta sectionum ducantur radii totitem ex centro A; sumptoque radio principali A*B*, dividatur idem in totidem quoque partes æquales, & transferantur partes illæ ordine super aliis radiis ad puncta sectionum ductis, pro ut ipsa indicat Figura; designabuntur in iis radiis totidem puncta, quæ erunt in Spirali describenda. Patetque etiam, quòd, tametsi inveniri nequeat æquatio, quæ exprimat relationem, quam habent puncta omnia Spiralis ad puncta alia alicujus rectæ lineæ positione datæ; tamen possit optimè inveniri æquatio, quæ designet relationem, quam habent puncta omnia ejusdem Spiralis ad puncta circumferentiæ Generatricis. Siquidem, positis integrâ circumferentiâ *BCDEB* $= a$; semidiametro A*B* $= c$; portione quavis circumferentiæ *B*CD $= x$; & portione semidiametri AN $= y$; quia per naturam Spiralis integra circumferentia *B*CDE*B* est ad ipsius portionem *B*CD; ut semidiameter A*B*, sive AD ad ipsius portionem AN, erit ut a ad x, ita c ad y; ac propterea æquatio quæsita erit $cx = ay$. Fig. 87.

Sed hæc interim Spiralis prima dici potest; cum dari quoque possit secunda, tertia, quarta, & sic in infinitum. Etenim si semidiameter A*B* extendatur versus G, &, dum in gyrum circumfertur motu æquabili, exeat, ut priùs, ex extremo immobili A punctum, quod super ipsa A*B* æquabili itidem motu feratur; & in prima semidiametri circumvolutione punctum istud reperiatur in *B*, Spiralis descripta AONM*B* prima dicetur. Sed verò, si eadem tota producta semidiameter motu item æquabili adhùc in gyrum feratur; punctum verò illud pergat Fig. 88.

ulte-

ulterius eadem, quâ antea, æquabilitate moveri; adeò ut in fine ſecundæ circumvolutionis reperiatur in puncto F, & percurrat partem BF, ipſi AB æqualem; Spiralis hac ſecundâ Circumvolutione deſcripta BONMF ſecunda vocabitur; atque ita dicetur Spiralis tertia; quæ deſcribitur tertiâ ejuſdem ſemidiametri Circumvolutione FONMG: ſicque deinceps.

Et notandum, quòd non modò Spirales hac ratione deſcriptæ dicuntur apud Archimedem, alioſque Geometras prima, ſecunda, tertia; prout primâ ſecundâ, aut tertiâ ſemidiametri Circumvolutione deſcribuntur; ſed etiam Circuli ipſi revolutionibus iis efformati ab ipſo numero revolutionum ſua nomina ſortiantur. Siquidem dicitur primus Circulus, qui prima ſemidiametri Circumvolutione formatur; cujuſmodi in eadem Figura eſt Circulus BCDE: dicitur ſecundus, qui per ſecundam Circumvolutionem generatur; cujuſmodi eſt Circulus FCDE; atque ita deinceps. Quin etiam ipſa ſpatia ſpiralia, quatenùs ſcilicet radio Vectore, & Spirali continentur, ſpecialibus nominibus prædita ſunt inſtar ipſarum ſpiralium. Nam dicitur ſpatium Spirale primum, quod comprehenditur radio AB, & prima Spirali AONMB; dicitur ſpatium Spirale ſecundum, quod portione radii BF, & ſecunda Spirali BONMF continetur: atque ita deinceps.

Quòd verò attinet ad proprietates aliarum harum Spiralium, hæ eedem ſunt planè cum iis, quas primæ Spirali convenire demonſtravimus. Etenim, cum in quacunque ſemidiametri Circumvolutione motus idem ſemper maneat, ac æquabilis; & eadem quoque æquabilitate incedat ſemper in unaquaque revolutione punctum, quod ſuper ipſa ſemidiametro fertur ab extremo immobili ad extremum mobile; uti-

utique hæc proportio perpetuò locum habebit, quòd ita ſe habeat integra alicujus Circuli circumferentia ad ſuam ſemidiametrum, quemadmodum portio circumferentiæ per ſemidiametrum principalem percurſa ad portionem, quam eodem tempore ſuper ipſa ſemidiametro percurrit punctum illud, quod ab extremo ejus immobili ad extremum mobile fertur. Qua de re, ſi ducatur ex. gr. ad circumferentiam ſecundi Circuli radius quivis AD, (*ead. Fig.*) qui occurrat ſecundæ Spirali in puncto N, erit circumferentia primi Circuli BCDEB ad ſuam ſemidiametrum AB; uti eadem circumferentia unâ cum portione ſecundi FCD ad portionem radii centro, & ſecundâ Spirali contentam AN. Unde erit etiam, dividendo, ut circumferentia primi Circuli BCDEB ad ſuam ſemidiametrum AB, ita portio circumferentiæ ſecundi FCD ad portionem radii DN; quæ primo Circulo, & ſecundâ Spirali continetur.

Ceterum facile erit Spirales alias ad hujus ſimilitudinem in infinitum effingere. Nam, ſicuti ponit Archimedes, ut tam motus rectæ AB, quæ in orbem fertur, quàm motus puncti, quod per ipſam *AB* fertur ex A in *B* æquabilis ſit, adeò ut utroque motu æqualia ſpatia æqualibus temporibus percurrantur; ita meditari licet, ut vel alteruter eorum motuum; vel etiam ut uterque motus æquabilis non ſit, ſed juxta aliam quamvis rationem fiat. Hoc pacto palam eſt, Spiralis Archimedeæ proceſſum triplici quidem ratione in infinitum effingi poſſe; vel ſcilicet, ſi manente æquabili motu rectæ lineæ A*B* in orbem; ponatur variabilis juxta quamvis datam rationem motus puncti, quod ſuper ipſa A*B* fertur ex A in *B*; vel ſecundò ſi, manente æquabili motu puncti per rectam A*B* ex A in *B* delati, ponatur variabilis juxta quamvis datam rationem motus rectæ Fig.89.

lineæ

lineæ AB, quæ fertur in orbem: vel denique tertiò si uterque motus variabilis ponatur; tàm scilicet motus rectæ lineæ AB, quæ in gyrum revolvitur, quàm motus puncti, quod super ipsa AB ducitur ex A in B. Et manifestum est, quòd pro ut diversa ponitur ratio, secundùm quam alteruter, vel uterque eorum motuum variatur; diversæ itidem naturæ Spiralis, quæ describitur, exoriatur.

Sed ut à Spiralibus, quæ prima ratione describuntur, exordiamur; ab iis scilicet, quæ ortum ducunt à motu æquabili rectæ lineæ AB, quæ in orbem circumagitur; & à motu utcumque variabili puncti, quod super ipsa AB fertur eodem tempore ex A in B: perspicuum est, eas ad tria genera præcipua reduci posse. Vel scilicet si motus puncti ita variabilis ponatur, ut tempora lationum sint ut potestates quævis spatiorum, quæ temporibus iis describuntur; vel vicissim si quævis temporum potestates sint ut spatia descripta; vel denique si conjunctim, ut quævis temporum potestates sint uti aliæ quævis potestates spatiorum, quæ temporibus illis percurruntur. Atque horum porro generum unumquodque infinitas alias species sub se continere, evidens quidem est. Etenim pro ut diversæ ponuntur potestates, sive temporum, sive spatiorum, diversa semper erit Spiralis descriptæ species sub genere eodem contenta.

Hac ratione Spirales primi generis poterunt omnes hac unica æquatione designari $b^m x = ay^m$: positis, ut supra (*ead. Fig.*) integrâ Circuli circumferentiâ $BCDEB = a$; semidiametro $AB = b$; portione quavis circumferentiæ $BCD = x$; portione semidiametri centro, & Spirali contentâ $AN = y$. Nam, cum punctum super recta AB ita quidem in hoc genere ex A in B feratur, ut tempore lationum sint ut potestates quævis spatiorum, quæ temporibus illis describuntur; utique potestas portionis AN erit ad homogeneam potestatem totius semidiametri AB, sive AD, ut tempus, quo percurritur portio AN, ad tempus, quo percurritur integra semidiameter AB. Sed, propter motum æquabilem ipsius AB, quæ fertur in orbem, & eodem tempore, quo punctum ex A in B, ut semper supponitur; tempus, quo percurritur portio AN est ad tempus, quo percurritur semidiameter tota AB; ut portio circumferentiæ BCD, ad circumferentiam integram $BCDEB$: quare, ex æqua ratione, ut potestas quævis portionis AN ad potestatem homogeneam totius semidiametri AB, sive AD, ita portio circumferentiæ BCD, ad circumferentiam integram $BCDEB$. Unde, posita littera m pro exponente potestatis portionis AN; erit ut y^m ad b^m, ita x, ad a: atque adeò æquatio erit $b^m x = ay^m$: quæ quidem æquatio etsi generalis, reddetur tamen specialis, determinando valorem exponentis m. Quippe si ponatur $m = 1$; æquatio erit $bx = ay$, quæ designat Spiralem Archimedeam. Dein si ponatur $m = 2$; æquatio erit $bbx = ayy$; quæ Spiralem aliam alterius speciei designabit: atque ita deinceps.

Eadem ratione Spirales secundi generis poterunt omnes hac unica generali æquatione definiri $bx^n = a^n y$: manentibus, ut supra [*ead. Fig.*] integrâ circumferentiâ BCDEB $= a$; portione ejus BCD $= x$; semidiametro AB, sive AD $= b$; portione ipsius AN $= y$. Etenim, cum in hoc secundo genere punctum super semidiametro AB ita quidem ex A, in B feratur, ut spatia descripta sint vicissim, ut potestates quævis temporum, quibus spatia illa

illa deſcribuntur; utique portio ſemidiametri A N erit ad ipſam ſemidiametrum AB, ſive AD; ut poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio AN ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ſemidiameter AB. Jam verò, propter motú æquabilem ipſius A B in orbem delatæ, poteſtas temporis, quo deſcribitur portio AN eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ſemidiameter integra AB; ut poteſtas ſimilis portionis circumferentiæ B C D ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDEB: igitur erit, ex æqua ratione, ut portio ſemidiametri AN, ad ſemidiametrum ipſam AB; ita poteſtas quævis portionis circumferentiæ BCD ad poteſtatem homogeneam totius circumferentiæ $BCDEB$. Quare, poſitâ littera n pro exponente poteſtatis circumferentiæ portionis BCD, erit ut y ad B, ita x^n ad a^n; ac propterea æquatio erit $bx^n = a^n y$; quæ etſi generalis, reddetur tamen ſpecialis, determinando valorem exponentis n. Ponatur enim $n = 1$; æquatio erit $bx = ay$; quæ denotat Spiralem Archimedeam: ſi vero ponatur $n = 2$; æquatio eadem erit $bxx = ayy$; quæ ſpiralem aliam deſignat ab Archimedea diverſam: atque ita deinceps.

Nec diſſimiliter Spirales tertii generis poterunt omnes hac unica generali æquatione comprehendi $b^m x^n = a^n y^m$, retentis ſemper (*ead. Fig.*) circumferentiâ integrâ BCDEB $= a$; portione ejus B C D $= x$; ſemidiametro AB, ſive AD $= b$; & portione A N $= y$. Siquidem, cum in hoc tertio genere Spiralium punctum ſuper ſemidiametro AB ita quidem ex A in B feratur, ut quævis temporum poteſtates ſint ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; utique poteſtas quævis portionis ſemidiametri A N erit ad poteſtatem homogeneam totius ſemidiametri AB, ſive AD, ut alia quævis poteſtas temporis, quo percurritur portio ſemidiametri A N ad poteſtatem homogeneam temporis, quo percurritur ipſa ſemidiameter A B. Jam verò propter motum æquabilem rectæ lineæ AB, quæ fertur in orbem, poteſtas temporis, quo deſcribitur portio A N eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo integra ſemidiameter A B deſcribitur, ut poteſtas ſimilis portionis circumferentiæ BC D ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ $BCDEB$; quare erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis ſemidiametri A N ad poteſtatem homogeneam integræ ſemidiametri AB; ita alia quævis poteſtas portionis circumferentiæ B C D ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ B C D E B. Quamobrem ſi dicatur m exponens poteſtatis portionis ſemidiametri A N, & n exponens poteſtatis portionis circumferentiæ BCD; erit ut y^m ad b^m, ita x^n ad a^n; atque adeo æquatio erit $b^m x^n = a^n y^m$; quæ tametſi ſit generalis, reddetur tamen ſpecialis, ſi, perinde ac in antecedentibus, determinetur valor tàm exponentis m, quàm exponentis n.

Adnotandum tamen, æquationem iſtam generalem $b^m x^n = a^n y^m$ Spirales omnes tertii generis deſignantem, poſſe quoque adplicari ad deſignandas Spirales omnes tàm generis primi, quam ſecundi; atque idcirco aliis præcedentibus æquationibus generaliorem eſſe. Etenim, ſi retento exponente m adhùc indeterminato, ponatur dumtaxàt $n = 1$; æquatio illa generalis mutabitur in iſtam $b^m x = a y^m$;

$a\,y^m$; quæ eſt æquatio generalis Spiralium omnium generis primi. Et ſi viciſſim retento exponente n adhùc indeterminato, ponatur $m = 1$; eadem illa generalis æquatio vertetur in hanc aliam $bx^n = a^n y$; quæ eſt æquatio generalis Spiralium omnium generis ſecundi. Et advertatur etiam, quòd Spirales iſtæ tertii generis non ſemper tales ſint, quales per æquationem exibentur; ita ut ad tot dimenſiones naturâ ſuâ eæ aſcendant, quot deſignat ſumma exponentium m, & n. Quippè aliquando, extractis ex utraque æquatione radicibus, poſſunt ad dimenſiones pauciores deprimi. Veluti ſi ponatur $m = 2$. $n = 4$; generalis illa æquatio evadet $bbx^4 = a^4 yy$. Quæ tamen, per extractionem radicis quadratæ ex utraque parte æquationis, reducetur ad hanc $bxx = aay$. Proindeque Spiralis, quæ primo adſpectu quatuor dimenſionum apparebat, naturâ ſuâ ad duas ſolùm aſcendit. Atque hoc pacto, ut vides, non ſolùm deprimitur ad dimenſiones pauciores, ſed etiam ex tertio genere fit generis ſecundi.

Nunc Spirales illas proſequemur, quæ ſecundâ ratione generari intelliguntur; ſcilicet ex motu æquabili puncti, quod ſuper ſemidiametro A B fertur ex A, in B; & ex motu utcunque variato ipſius ſemidiametri A B, quæ fertur in gyrum. Atque ejuſmodi quoque Spirales ad tria genera revocari poſſe, perſpicuum quidem eſt; etenim vel motus ſemidiametri A B, quæ fertur in orbem, ita ponitur variabilis, ut tempora lationum ſint, ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ temporibus iis deſcribuntur; & Spirales hoc pacto deſcriptæ erunt generis primi: vel idem motus ſemidiametri A B ita ponitur variabilis; ut viciſſim quævis temporum poteſtates ſint, ut ſpatia temporibus iis deſcripta: & Spirales, quæ ita deſcribuntur, erunt generis ſecundi: vel denique motus ſemidiametri A B ita quidem ponitur variabilis; ut conjunctim quævis temporum poteſtates ſint ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus illis percurruntur; et quæ hac ratione deſcribuntur Spirales erunt generis tertii. Sed nihilominus quæ in hac claſſe ſunt generis primi, eædem ſunt cum iis, quæ in Claſſe antecedenti ſunt generis ſecundi; et quæ hic ſecundi ſunt generis, ejuſdem planè ſunt naturæ cum iis, quæ ibi erant generis primi; quæque verò in utraque Claſſe ſunt tertii generis, ejuſdem quoque naturæ deprehenduntur.

Nam primò quod attinet ad Spirales primi generis; quia in iis motus ſemidiametri AB, (*ead. Fig.*) quæ fertur in gyrum, ita ponitur variabilis, ut tempora lationum ſint, ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ iis temporibus deſcribuntur; utique poteſtas quævis portionis circumferentiæ BCD erit ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDEB, ut tempus, quo deſcribitur portio circumferentiæ BCD, ad tempus, quo deſcribitur circumferentia integra B C D E *B*. Jam verò propter motum æquabilem puncti, quod ſuper ipſa A *B* fertur ex A in *B*, & eodem tempore, quo ipſa A *B* fertur in orbem; tempus, quo deſcribitur portio circumferentiæ *B*CD eſt ad tempus, quo deſcribitur circumferentia integra *B*C D E B, ut portio ſemidiametri A N, ad ſemidiametrum ipſam A *B*. Igitur erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ *B* C D ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ B C D E B, ita portio ſemidiametri A N ad ſemidiametrum ipſam A *B*. Unde, retentâ eadem denominatione, ſcilicet circumferentiâ integrâ B C D E B $= a$;

 ſemi-

ſemidiametro AB $=b$; portione circumferentiæ $BCD = x$; & portione ſemidiametri AN $= y$; ſi porrò dicatur n exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio circumferentiæ BCD; erit ut x^n ad a^n, ita y ad b. Atque adeò æquatio erit $b\,x^n = a^n\,y$; eadem plane cum illa, quæ in Claſſe antecedenti Spirales omnes ſecundi generis repræſentabat.

Secundò quod ſpectat ad Spirales ſecundi generis; quoniam in iis motus ſemidiametri AB, [*ead. Fig.*] quæ fertur in orbem, ita ponitur variabilis, ut viciſſim quævis temporum poteſtates ſint ut ſpatia temporibus iis deſcripta: profectò portio circumferentiæ BCD erit ad circumferentiam integram $BCDEB$, ut poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ BCD, ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur circumferentia integra BCDEB; ſed propter motum æquabilem puncti, quod ſuper ipſa AB fertur ex A in B, poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ BCD eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur circumferentia integra BCDEB, ut ſimilis poteſtas portionis ſemidiametri AN ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB. Igitur erit, ex æqua ratione, ut portio circumferentiæ BCD ad circumferentiam integram $BCDEB$, ita poteſtas quævis portionis ſemidiametri AN ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB: proindeque, retentâ eadem denominatione, ſi vocetur m exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio ſemidiametri AN; erit ut x ad a ita y^m ad b^m. Ac propterea æquatio erit $b^m\,x = a\,y^m$; eadem planè cum illa, quæ in Claſſe antecedenti Spirales omnes deſignat generis primi.

Tertio

Tertiò denique quod attinet ad Spirales tertii generis, quia in iis motus ſemidiametri AB, [*ead. Fig.*] quæ in gyrum revolvitur, ita ponitur variabilis, ut conjunctim poteſtates quævis ſpatiorũ ſint, ut aliæ quævis poteſtates temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur; utique poteſtas quævis portionis circumferentiæ BCD erit ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ $BCDEB$, ut alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ BCD ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur circumferentia integra BCDEB. Sed propter motum æquabilem puncti, quod ſuper ipſa ſemidiametro AB fertur ex A in B, poteſtas temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ BCD eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur circumferentia integra BCDEB, ut ſimilis poteſtas portionis ſemidiametri AN ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB. Igitur erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ BCD ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDEB, ita poteſtas quævis alia portionis ſemidiametri AN ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB. Qua de re, manente eadem denominatione, ſi vocetur m exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio ſemidiametri AN, & n exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio circumferentiæ BCD; erit ut x^n ad a^n, ita y^m ad b^m: propterea æquatio erit $b^m\,x^n = a^n\,y^m$; eadem plane cum illa, quæ in claſſe antecedenti Spirales omnes tertii generis repræſentat.

Tandem Spirales illas conſiderabimus, quæ tertiâ quidem ratione generari intelliguntur, ſcilicet ex motu variabili tam ſemidiametri AB, quæ fertur in orbem, quàm puncti, quod ſuper ipſa ſemidia-

metro

metro A B fertur ex A in B [*ead. Fig.*]. Atque ejuſmodi Spirales ad novem genera præcipua reduci, perſpicuum eſt. Etenim, cum uterque motus triplici modo variari poſſit; primò, ſi nempe tempora lationum ſint ut poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus iis deſcribuntur; ſecundò, ſi viciſſim poteſtates temporum ſint ut ſpatia temporibus iis deſcripta; tertiò ſi conjunctim poteſtates temporum ſint ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus illis percurruntur; palam eſt, unum motum cum alio novem modis diverſis poſſe combinari; atque ita ex diverſis hiſce combinationibus totidem alia genera Spiralium exſurgere. Sed nihilominùs poterunt omnia illa genera ad unicum reduci; atque omnes Spirales, quæ hac tertia ratione deſcribuntur, generali iſta æquatione comprehendi $b^m x^n = a^n y^m$. Ut hinc appareat, Spirales hujus tertiæ Claſſis eaſdem eſſe cum illis, quæ in utraque Claſſe antecedenti genus tertium conſtituunt.

Etenim, ſi uterque motus ita ponatur variabilis, ut poteſtates ſpatiorum ſint ut poteſtates aliæ temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur; quæ quidem hypotheſis comprehendit quoque alias duas, in quibus ſpatia, vel tempora ad nullam elevata poteſtatem ſupponuntur; erit primò ut poteſtas quævis portionis ſemidiametri A N (*ead. Fig.*) ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri A B, ita alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio ſemidiametri A N, ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa ſemidiameter A B. Et ſecundò ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ B C D, ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDEB ita alia quævis poteſtas temporis, quo deſcritur portio circumferentiæ BCD, ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur circumferentia integra BCDEB. Unde ſi, retentâ ſemper eadem denominatione, quam ſuperiùs adhibuimus, dicatur porro t tempus, quo deſcribitur tam portio ſemidiametri AN, quàm portio circumferentiæ BCD, & T tempus, quo deſcribitur tam ſemidiameter ipſa A B, quàm circumferentia integra, BCDEB; ac præterea p exponens poteſtatis, ad quam evehitur portio ſemidiametri A N, q exponens poteſtatis, ad quam aſcendit tempus t, quotieſcunque cum ipſa portione A N comparatur; r exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio circumferentiæ B C D; & s exponens poteſtatis, ad quam aſcendit item tempus t, ubi confertur cum portione circumferentiæ B C D;

erit primò ut y^p ad b^p, ita t^q ad T^q: & ſecundò, ut x^r ad a^r, ita x^s ad T^s. Sed ex prima proportionalitate eruitur, quòd t ſit ad T, ut $y^{\frac{p}{q}}$ ad $b^{\frac{p}{q}}$; & ex ſecunda, quòd x ſit ad T, ut $x^{\frac{r}{s}}$ ad $a^{\frac{r}{s}}$. Quare erit, ex æqua ratione, ut $y^{\frac{p}{q}}$ ad $b^{\frac{p}{q}}$, ita $x^{\frac{r}{s}}$ ad $a^{\frac{r}{s}}$; ſive etiam ut y^m ad b^m ita x^n ad a^n; ſi ponatur $\frac{p}{q} = m$; & $\frac{r}{s} = n$.

Atque adeò æquatio erit $b^m x^n = a^n y^m$.

CAPUT

CAPUT IX.

De Quadratrice Dinostrati, & Nicomedis, ac de ejus in infinitum Processu.

Fig 90. SEquitur secunda Linea Mechanica ab antiquis excogitata, quæ Quadratrix, sive Linea Quadrans dicta est; quòd ad Circuli quadraturam a Dinostrato, & Nicomede fuerit sumpta. Ortum habet ejusmodi. Exponatur Quadratum *ABCD*, in quo describatur quadrans Circuli *B* D: & dum semidiameter A B fertur in orbem circa centrum A æquabili motu ex B in D; adeò ut æqualibus temporibus æqualia spatia percurrat ipsius Quadrantis *B D*; intelligatur intereà motu itidem æquabili, sibiquemet ipsi parallelum ferri latus B*C* versùs latus oppositum AD, sed ita tamen, ut, quo tempore semidiameter AB pervenit ad positionem A D, atque adeò integrum Quadrantem *B*D describit, latus ipsum *B*C ad eandem positionem AD perveniat. Etenim, cum semidiameter in orbem acta per circumferentiam Quadrantis *B* D continuò se secet cum latere *B C* deorsùm prædicto modo lato, transibit per puncta interfectionum Linea Curva BNE, quæ erit *Quadratrix* Dinostrati, & Nicomedis.

Fig 91 Unde patet ejusmodi Curvæ hanc esse proprietatem præcipuam, ut, si ducatur ad circumferentiam quadrantis B D semidiameter quævis A F, quæ secet descriptam Curvam in puncto N; & ex eo ducatur recta N M ipsi A B perpendicularis; atque adeò parallela lateri B C; ut, inquam, integra Quadrantis circumferentia *B* F D sit ad portionem abscissam BF, ut est integra semidiameter AB ad portionem ejus BM, abscissam per perpendicularem NM. Nam, si integra Quadrantis circumferentia divisa intelligatur in centum partes æquales; & in totidem quoqne partes divisam ponamus semidiametrum A B: profectò eodem temopore, quo semidiameter AB in orbem delata percurrit partem unam peripheriæ Quadrantis B F D, latus B C deorsùm sibi semper æquidistanter delatum percurret etiam partem unam ipsius ejusdem semidiametri A *B*: & similiter eodem tempore, quo semidiameter A B percurrit ex. gr. partes decem circumferentiæ Quadrantis B F D, latus B C motu suo percurret quoque partes decem semidiametri A B: proindeque erit semper, ut integra Quadrantis circumferentia ad portionem per semidiametrum percursam; ita ipsa semidiameter ad portionem ejus, quæ latere Quadrati eodem tempore percurritur. Unde, quia latus Quadrati BC percurrit in semidiametro A *B* portionem BM, tempore illo, quo ipsa semidiameter A B ad positionem A F pervenit; consequitur, ut integra Quadrantis circumferentia B F D sit ad portionem ejus B F, ut integra semidiameter A B ad portionem *B* M.

Atque hic plura quidem deducuntur. Nempè primò, quòd integra Quadrantis circumferentia B F D (*ead. Fig.*) sit ad portionem alteram ipsius F D, veluti est eadem semidiameter A *B* ad portionem alteram ipsius A M. Nam, cum sit ut integra Quadrantis circumferentia *B* F D ad portionem ipsius *B* F, ita integra semidiameter A *B* ad portionem semidiametri ipsius *B*M; erit etiàm, dividendo, ut integra Quadrantis circumferentia *B* F D ad portionem alteram F D; ita eadem semidiameter A *B* ad portionem aliam A M.

Secundo,

Secundò, quòd portio circumferentiæ Quadrantis *B F* (*ead. Fig.*) sit ad portionem aliam F D, ut est portio semidiametri *B* M ad portionem aliam M A. Etenim, ut portio circumferentiæ *B* F ad circumferentiam integram Quadrantis *B* F D, ita portio semidiametri *B* M ad semidiametrum ipsam A *B*; sed circumferentia integra Quadrantis *B* F D est ad portionem aliam ipsius F D, veluti est tota semidiameter A *B* ad ipsius portionem alteram A M. Quare erit, ex æqua ratione ordinando, ut portio circumferentiæ Quadrantis *B* F ad portionem alteram F D, ita portio semidiametri *B* M ad portionem alteram M A.

Fig. 92. Tertiò, quòd si ducatur radius alter A G, qui secet Quadratricem in puncto O; ex quo similiter ducatur recta O R ipsi A *B* perpendicularis; quòd, inquam, portio circumferentiæ Quadrantis *B* F sit ad portionem aliam *B* G, ut est portio semidiametri *B* M ad portionem aliam B R. Nam portio circumferentiæ *B* F est ad circumferentiam integram Quadrantis *B* F D, ut est portio semidiametri *B* M ad semidiametrum ipsam A B. Jam verò circumferentia integra Quadrantis *B* F D est ad portionem aliam *B* G, ut semidiameter A *B* ad portionem aliam B R; quare erit, ex æqua ratione ordinando, ut portio circumferentiæ *B* F ad portionem alteram *B* G, ita portio semidiametri *B* M ad portionem aliam *B* R.

Quartò, quòd, iisdem positis, portio circumferentiæ F D (*ead. Fig.*) sit ad portionem aliam G D, ut portio semidiametri A M ad portionem alteram A R. Est enim ut portio circumferentiæ F D ad circumferentiam integram Quadrantis *B* F D, ita portio semidiametri A N ad semidiametrum A B. Sed circumferentia integra Quadrantis *B* F D est ad portionem ipsius G D, ut semidiameter A *B* ad ejus portionem A R, igitur erit, ex æqua ratione ordinando, ut portio circumferentiæ F D ad portionem aliam G D, ita portio semidiametri A M ad portionem aliam A R.

Quintò demùm, quòd si integra Quadrantis circumferentia dividatur in quotcumque partes æquales *B* F, F G, G H, H D; & ad puncta sectionum ducantur radii A F, A G, A H, secantes descriptam Quadratricem in punctis N, O, P, ex quibus demittantur ad semidiametrum A *B* perpendiculares N M, O R, P Q; quòd, inquam, portiones semidiametri per perpendiculares illas abscissæ B M, *B* R, B Q, B A, sint in arithmetica progressione. Fig. 93. Nam portio circumferentiæ B F est ad portionem B G, ut portio semidiametri *B* M ad portionem B R. Et similiter portio circumferentie B G est ad portionem *B* H, veluti portio semidiametri B R ad portionem B Q. Quare portiones circumferentiæ B F, B G, *B* H, *B* D, erunt inter se, ut portiones semidiametri B M, B R, B Q, B A. Atque adeò cum primæ portiones progressionem arithmeticam constituant; erunt etiam secundæ in arithmetica progressione. Item, dividendo, æquales erunt portiones semidiametri B M, M R, R Q, Q A.

Per quæ facile modò est Quadratricem in plano per puncta describere. Etenim, si Quadrantis circumferentia B D dividatur in plures partes æquales; & in totidem partes æquales dividatur etiam semidiameter A B; ac porrò ad puncta sectionum circumferentiæ ducautur radii totidem; atque ex punctis sectionum diametri excitentur totidem quoque perpendiculares; quia hæ perpendiculares se interfecant cum illis radiis in totidem aliis punctis, uti Schema repræsentat, erunt omnia illa puncta in Quadratrice describenda: ita ut quô major est numerus partium Fig. 94.

æqua-

æqualium, in quas dividitur tàm integra Quadrantis circumferentia BD, quàm semidiameter ipsa AB; eò pariter major est numerus punctorum, quæ habentur pro Quadratice describenda. Et perspicuum est, quòd, tametsi nequeat inveniri æquatio, quæ exprimat nobis relationem, quam habent puncta omnia Quadratricis B E ad puncta alia alicujus rectæ lineæ positione datæ, uti AB, vel AE; tamen possit optime inveniri æquatio, quæ designet relationem, quam habent puncta omnia ejusdem Quadratricis ad puncta ipsa circumferentiæ Quadrantis. Siquidem, positis, uti supra, integrâ circumferentiâ $BD = a$; porti ne quavis ejus $BF = x$; positis insuper integrâ semidiametro $AB = b$; & portione ejus $BM = y$; quia per naturam Quadratricis integra Quadrantis circumferentia BD est ad portionem ejus BF, ut integra semidiameter AB ad portionem BM; erit a ad x; ita b, ad y: atque adeò æquatio erit $ay = bx$.

Sed aliam habet Curva ista proprietatem, propter quam Quadratricis nomen sortita est, scilicet quòd semidiameter AB media sit proportionalis in-
Fig. 95. ter basim Quadratricis AE, & Quadrantis circumferentiam BD. Etenim, si sumatur in ipsa Quadrantis circumferentia BD arcus DH indefinitè parvus, & ad punctum H ducatur radius AH secans Quadratricem in puncto P, erit etiam intercepta portio Quadratricis PE indefinitè parva; & proinde tanquàm æquales considerari poterunt rectæ lineæ AP, AE; atque ideò mixtilineum APE veluti Circuli sector spectari, cujus semidiameter sit AP, vel AE. Jam verò propter similitudinem sectorum APE, AHD, basis Quadratricis AE est ad semidiametrum AD, ut portio Quadratricis PE ad arcum DH; igitur, cùm, ductâ PQ ipsi AB perpendiculari, portio Quadratricis PE sumi possit æqualis portioni semidiametri AQ, erit etiam ut AE, ad AD, ita AQ, ad DH. Est verò ut AQ, ad DH, ita AB, ad BD; quare erit, ex æqua ratione, ut AE, ad AD, ita AB, ad BD; propterea semidiameter AB media erit proportionalis inter basim Quadratricis AE, & Quadrantis circumferentiam BD.

Atque hinc, si punctum Quadratricis E (*ead. Fig.*) possit determinari, facile foret tàm rectam lineam invenire, quæ sit æqualis circumferentiæ Circuli, quàm quadratum exponere, cui sit æquale spatium Circulare. Nam, quod ad primum attinet, perspicuum est, id facile obtineri, si fiat, ut *Basis* Quadratricis AE ad semidiametrum AD, ita eadem semidiameter AD ad quartam rectam lineam X. Quippè cum sit etiàm ut AE ad AD, ita AD ad BD, erit recta linea X æqualis longitudini circumferentiæ Quadrantis BD. Et quod spectat ad secundum; quia area totius Quadrantis ABD sit per multiplicationem circumferentiæ BD in dimidium semidiametri AB; invenietur quadratum, cui si æqualis area Quadrantis ABD; si fiat, ut recta linea Z sit media proportionalis inter rectam lineam X, & dimidium semediametri AB. Etenim, cum recta linea X sit æqualis circumferentiæ Quadrantis BD, erit eadem recta linea Z media proportionalis inter circumferentiam Quadrantis BD, & dimidium ejusdem semidiametri AB; proindeque erit quadratum ipsius Z æquale areæ, sive spatio totius Quadrantis ABD.

Verumtamèn, quia punctum Quadratricis E non alia ratione potest determinari, nisi per approximationem; cùm in ea nulla fiat linearum intersectio; eò quòd eodem tempore, quo semidameter AB pervenit ad positionem AD, latus quadrati BC ad eandem positionem pertingit; nec idcircò sese invicem intersecant, sed tantùm una linea super altera jaceat;

ceat; hinc est, ut utrumque problema [quod in unum incidit] & rectificationis circumferentiæ Circuli, & Quadraturæ ſpatii Circularis ab eadē circumferentia comprehenſi, ope ipſius Quadratricis ſolvi nequeat exacte; ſed tamen per approximationem; ſive ſtatuendo limites, quibus valor quantitatis quæſitæ continetur. Atque hic locus eſſet opportunus, ut ea in medium proferremus, quæ ſuper hoc celebri problemate de Quadratura Circuli conſiderarunt hactenus Geometræ. Sed quoniam id, longiùs nos duceret, quàm noſter eſt animus, cùm res digna ſit, quæ ferè integro, juſtoque libello pertractetur; liberiùs ab hoc opere abſtinemus; atque rem apud alios auctores, ſi fortè voluntas erit, licebit cognoſcere.

Hæc igitur eſt veterum Curva linea, quæ Quadratrix, ſive linea Quadrans dicitur. Reſtat modò, ut ejuſdem in infinitum proceſſum expendamus; ſcilicet quo pacto Curvæ aliæ ad ejus ſimilitudinem in infinitum effingi poſſunt. Et ſane, cùm ejuſmodi Curva linea ex duplici motu ſuam habeat originem; ſcilicet, ex motu ſemidiametri, quæ fertur in orbem æquabiliter per circumferentiam Quadrantis, & ex motu itidem æquabili lateris Quadrati, quod deorſum fertur ſibimetipſi ſemper parallelum; ſed ita tamen ut uterque motus eodem tempore abſolvatur; adeò ut tàm ſemidiameter, quàm latus Quadrati ad eandem poſitionem perveniat; perſpicuum eſt, proceſſum alterius hujus Curvæ Veterum non aliter fieri poſſe, quàm inſtar proceſsûs Spiralis: ſcilicet vel ſi eorum motuum alteruter, vel ſi etiam uterque motus juxtà quamvis datam rationem variabilis ſupponatur. Hac ratione triplex quoque erit Claſſis Quadratricum; quæ exinde oriuntur. Nam prima eas continebit, quæ formantur motu æquabili ſemidiametri, & motu utcumque variabili lateris quadrati.

Seunda Claſſis comprehendet Quadratrices illas, quæ generari intelliguntur ex motu æquabili lateris quadrati, & ex motu juxta quamvis datam rationem variabili ſemidiametri. Ac tertia demùm erit earum Quadratricum, quæ ſuam geneſim habent ex motu variabili tàm ſemidiametri, quàm lateris Quadrati.

Ut autem Quadratrices primæ Claſſis primo loco in medium afferamus, ſcilicet eas, quæ generari intelliguntur ex motu æquabili ſemidiametri AB, quæ fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis *BD*, & ex motu utcumque variabili lateris Quadrati BC, quod eodem tempore deorsùm fertur ſibimet ipſi parallelum; perſpicuum eſt, ea ad tria genera præcipua reduci poſſe. Si quidem vel motus lateris Quadrati BC ita ponitur variabilis, ut tempora lationum ſint ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ temporibus iis deſcribuntur; & Quadratrices hoc pacto deſcriptæ erunt generis primi: vel idem motus ita ponitur variabilis, ut viciſſim quævis temporum poteſtates ſint ut ſpatia temporibus iis deſcripta; & Quadratrices, quæ hac lege deſcribuntur erunt generis ſecundi: vel denique motus lateris Quadrati *BC* ponitur ſubinde variabilis, ut conjunctim quævis temporum poteſtates ſint ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus illis percurruntur; & quæ hoc pacto deſcribuntur Quadratrices genus tertium conſtituunt. Atque horum porrò generum unumquodque infinitas alias ſpecies Quadratricum comprehendere, evidens quidem eſt. Etenim, prout diverſæ ponuntur poteſtates ſive temporum, ſive ſpatiorum, diverſa quoque erit Quadratrix deſcripta.

Fig.96.

Sed nihilominùs poterunt omnes primi generis Quadratrices hac unica generali æquatione deſignari ri $a\ y^m = b^m x$; positis, ut supra, integrâ Quadrantis circumferentiâ BD $= a$; (*ead. Fig.*) portiones ejus BF $= x$; Semidiametro $AB = b$; portione ejus BM $= y$. Etenim, cùm in hoc primo genere Quadratricum motus lateris ita ponatur variabilis, ut tempora lationum sint ut potestates quævis spatiorum, quæ describuntur illis temporibus; utique potestas quævis portionis semidiametri BM erit ad potestatem homogeneam totius semidiametri AB; ut tempus, quo describitur portio BM ad tempus, quo describitur semidiameter ipsa AB. Sed verò propter motum æquabilem semidiametri AB, quæ fertur in orbem, & eodem tempore versùs AD; quo BC versùs idem latus AD, quod semper nobis adsumimus; tempus, quo describitur portio semidiametri BM est ad tempus, quo describitur integra semidiameter AB, ut est portio circumferentiæ Quadrantis BF ad circumferentiam ipsam BD. Ergo erit, ex æqua ratione, ut potestas quævis portionis semidiametri BM ad potestatem homogeneam ipsius semidametri AB; ita portio circumferentiæ Quadrantis BF ad ipsam Quadrantis circumferentiam BD. Unde, positâ litterâ m pro exponente potestatis, ad quam ascendit portio semidiametri BM, fiet proportio, ut y^m ad b^m, ita x ad a; atque adeò æquatio erit ut supra $a\,y^m = b^m x$.

Nec dissimiliter Quadratrices secundi generis poterunt omnes hac unica generali æquatione definiri; $a^n\ y = b\,x^n$; manentibus, ut supra, circumferentiâ integrâ (*ead. Fig.*) Quadrantis $BD = a$; Semidiametro $AB = b$; portione circumferentiæ $BF = x$; & portione semidiametri BM $= y$. Siquidem, cùm in hoc secundo genere Quadratricum motus lateris Quadrati BC ita quidem variabilis ponatur, ut spatia descripta sint vicissim ut potestates quævis temporum, quibus spatia illa describuntur, utique portio semidiametri BM erit ad semidiametrum ipsam AB, veluti potestas quævis temporis, quo describitur portio semidiametri BM ad potestatem homogeneam temporis, quo describitur semidiameter ipsa AB; verumtamen, propter motum æquabilem semidiametri AB, quæ eodem tempore fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis BD, potestas quævis temporis, quo describitur portio semidiametri BM est ad potestatem homogeneam temporis, quo describitur semidiameter ipsa AB; ut est similis potestas portionis circumferentiæ Quadrantis BF ad potestatem homogeneam ipsius Quadrantis Circumferentiæ BD. Igitur erit, ex æqua ratione, ut portio semidiametri BM ad semidiametrum ipsam AB; ita potestas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis BF ad potestatem homogeneam ipsius Quadrantis circumferentiæ BD. Idcircoque, positâ litterâ x pro exponente potestatis, ad quam ascendit portio Circumferentiæ Quadrantis BF, erit ut y ad b ita x^n ad a^n; adeoque æquatio erit $b\,x^n = a^n y$. Uti supra modò dictum est.

Eadem quoque ratione Quadratrices tertii generis poterunt omnes hac unica generali æquatione designari $a^n\ y^m = b^m\ x^n$; manentibus semper circumferentiâ Quadrantis $BD = a$; [*ead. Fig.*] portione ejus $BF = x$; semidiametro $AB = b$; portione ejus BM $= y$. Nàm, cùm in hoc tertio genere Quadratricum motus lateris Quadrati BC subinde varius sit, ut conjunctim temporum quævis potestates

tes sint uti aliæ quævis potestates spatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; profectò potestas quævis portionis semidiametri BM erit ad potestatem homogeneam ipsius semidiametri AB, ut alia quævis potestas temporis, quo describitur portio semidiametri BM ad potestatem homogeneam temporis, quo describitur semidiameter ipsa AB. Jam verò propter motum æquabilem semidiametri AB, quæ eodem tempore fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis BD; potestas temporis, quo describitur portio semidiametri BM est ad potestatem homogeneam temporis, quo describitur semidiameter ipsa AB, ut huic similis potestas portionis circumferentiæ Quadrantis BF ad potestatem homogeneam ipsius circumferentiæ Quadrantis BD: quare erit, ex æqua ratione, ut potestas quævis portionis semidiametri BM ad potestatem homogeneam ipsius semidiametri AB; ita alia quævis potestas portionis circumferentiæ Quadrantis BF ad potestatem homogeneam ipsius circumferentiæ Quadrantis BD. Idcircoque, si dicatur m exponens potestatis, ad quam ascendit portio semidiametri BM, & n exponens potestatis, ad quam ascendit portio circumferentiæ Quadrantis BF, erit ut y^m ad b^m, ita x^n ad a^n; atque adeo æquatio erit, ut supra, $a^n\ y^m = b^m\ x^n$.

Quòd verò spectat ad Quadratrices secundæ Classis, nempè ad eas, quæ generari intelliguntur ex motu æquabili lateris Quadrati BC, (*ead. Fig.*) motu variabili semidiametri AB; palam est, illas ad tria quoque genera præcipua reduci posse. Etenim vel motus semidiametri AB ita ponitur variabilis, ut tempora lationum sint ut potestates quævis spatiorum, quæ temporibus iis percurruntur: & quæ hac ratione describuntur Quadratrices genus primi constituent: vel idem motus semidiametri AB ita ponitur variabilis, ut vicissim temporum quævis potestates sint, ut spatia temporibus iis percursa; & Quadratrices hoc pacto descriptæ genus secundum component: vel denique motus semidiametri AB ita quoque ponitur variabilis, ut conjunctim potestates quævis temporum sint, ut aliæ quævis potestates spatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; & Quadratrices, quæ hac ratione describuntur, erunt generis tertii. Sed nihilominus quæ in hac secunda Classe genus primum constituunt, eædem sunt cum illis, quæ in Classe antecedenti genus secundum conflant; & quæ vicissim in hac Classe constituunt genus secundum, eædem sunt cum iis, quæ in Classe antecedenti componunt genus primum; quæ verò in utraque Classe sunt generis tertii, ejusdem quoque naturæ deprehenduntur.

Nam primò quia in Quadratricibus primi generis motus semidiametri AB, (*ead. Fig.*) quæ fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis BD, ita ponitur variabilis, ut tempora lationum sint uti potestates quævis spatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; profectò potestas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis BF erit ad potestatem homogeneam ipsius Quadrantis circumferentiæ BD, ut tempus, quo describitur portio BF ad tempus, quo describitur BD. Sed, propter motum æquabilem lateris Quadrati BC, quod eodem tempore fertur deorsum sibimet ipsi parallelum, tempus, quo describitur portio circumferentiæ Quadrantis BF est ad tempus, quo describitur integra Quadrantis circumferentia BD, ut est portio semidiametri BM ad semidiametrum ipsam AB. Igitur erit, ex æqua ratione, ut potestas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis BF ad potestatem homogeneam ipsius Quadrantis

drantis circumferentiæ BD, ita portio ſemidiametri BM, ad ſemidiametrum ipſam AB. Idcircoque, ſi ponatur m pro exponente poteſtatis, ad quam aſcendit portio Quadrantis circumferentiæ BF, erit ut x^n ad a^n ita y ad b: æquatioque erit $bx^n = a^n y$; eadem planè cum illa, quæ in Claſſe antecedenti Quadratrices ſecundi generis deſignabat.

Secundò, quia in Quadratricibus ſecundi generis motus ſemidiametri AB, (*ead. Fig.*) quæ fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis BD ita ponitur variabilis, ut viciſſim poteſtates temporum ſint ut ſpatia temporibus iis deſcripta; erit quidem ut portio circumferentiæ Quadrantis BF ad ipſam Quadrantis circumferentiam BD, ita poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio BF, ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa BD. Jam verò, propter motum æquabilem lateris quadrati BC, quod eodem tempore fertur deorſum ſibimet ipſi parallelum, poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ Quadrantis BF eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa Quadrantis circumferentia BD, ut eſt huic ſimilis poteſtas portionis ſemidiametri BM ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB: quare erit, ex æqua ratione, ut portio circumferentiæ Quadrantis BF ad ipſam Quadrantis circumferentiam BD; ita poteſtas quævis portionis ſemidiametri BM ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemediametri AB: proindeque, ſi dicatur m exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio ſemidiametri BM, erit ut x ad a ita y^m ad b^m: atque adeo æquatio erit $ay^m = b^m x$: eadem cum illa planè, quæ in claſſe antecedenti Quadratrices generis primi indicabat.

Tertio

Tertiò quia in Quadratricibus tertii generis motus ſemidiametri AB, (*ead. Fig.*) quæ fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis BD, ita ponitur variabilis, ut conjunctim poteſtates temporum ſint ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; erit quidem poteſtas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis BF ad poteſtatem homogeneam ipſius Quadrantis circumferentiæ BD; ita alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio BF, ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa BD; ſed propter motum æquabilem lateris quadrati BC, quod eodem tempore fertur deorſum ſibimet ipſi ſemper æquidiſtans, poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ Quadrantis BF eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa Quadrantis circumferentia BD, veluti eſt huic ſimilis poteſtas portionis ſemidametri BM ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB: quare erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis BF ad poteſtatem homogeneam ipſius Quadrantis circumferentiæ BD; ita alia quævis poteſtas portionis ſemidiametri BM ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB. Igitur, ſi dicatur m exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio ſemidiametri BM, & n exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio circumferentiæ Quadrantis BF, erit ut x^n ad a^n ita y^m ad b^m; æquatioque eſt $a^n y^m = b^m x^n$; eadem planè cum illa, quæ in claſſe antecedendi Quadratrices generis tertii denotabat.

Superſunt Quadratrices tertiæ Claſſis, ſcilicet eæ, quæ generari intelliguntur ex motu variabili tàm ſemidiametri AB, (*ead. Fig.*) quæ fertur in

or-

orbem per circumferentiam Quadrantis B D, quàm lateris quadrati B C, quod eodem tempore fertur deorſum ſibimet ipſi parallelum. Atque ejuſmodi Quadratrices ad novem genera præcipua reduci poſſe, compertum quidem eſt. Etenim, cùm uterque eorum motuum triplici modo poſſit variari; primo nempè, ſi tempora lationum ſint ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ temporibus iis deſcribuntur: ſecundo ſi viciſſim temporum poteſtates quævis ſint, ut ſpatia temporibus iis deſcripta; ac poſtremo ſi conjunctim temporum quævis poseſtates ſint ut poteſtates aliæ ſpatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; profectò unus motus cum alio novem modis diverſis poteſt combinari; atque ita ex diverſis hiſce combinationibus totidem alia genera Quadratricum exiſtent. Verum enim vero Quadratrices omnes hujus tertiæ claſſis, cujuſcumque eæ ſint generis, poterunt hac unica generali æquatione deſignari $b^m x^n = a^n y^m$; retentis, veluti ſupra, integrâ Quadrantis circumferentiâ B D $= a$; ſemidiametro A B $= b$; portione Quadrantis circumferentiæ B F $= x$; & portione ſemidiametri B M $= y$.

Siquidem, ſi uterque motus eo modo ponatur variabilis, ut poteſtates ſpatiorum ſint ut aliæ quævis poteſtates temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur, (quæ quidem hypotheſis alias quoque duas comprehendit, in quibus vel ſpatia, vel tempora ad nullam poteſtatem elevata ponuntur) erit primò ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis B F [*Fig. ead.*] ad poteſtatem homogeneam ipſius Quadrantis circumferentiæ B D; ita alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio B F ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa B D. Et ſecundò ut poteſtas quævis portionis ſemidiametri B M ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri A B; ita alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio B M ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa AB: & hac ratione, ſi dicatur t tempus, quo deſcribitur tam portio circumferentiæ Quadrantis BF, quàm portio ſemidiametri BM; & T tempus, quo deſcribitur tàm ipſa Quadrantis circumferentia B D, quàm ipſa ſemidiameter A B; dicaturque præterea p exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio BF; q exponens poteſtatis, ad quam evehitur tempus t; quotieſcumque cum ipſa BF componatur; r exponens poteſtatis, ad quam extollitur portio ſemidiametri BM; & s exponens poteſtatis, ad quam aſcendit idem tempus t, ubi confertur cum ipſa BM; erit primo ut x^p ad a^p, ita t^q ad T^q. Et ſecundò, ut y^r ad b^r, ita t^s ad T^s. Jam verò ex proportionalitate prima eruitur, quòd t ſit ad T, ut $x^{\frac{p}{q}}$ ad $a^{\frac{p}{q}}$; & ex ſecunda proportionalitate, quòd t ſit ad T, ut $y^{\frac{r}{s}}$ ad $b^{\frac{r}{s}}$. Quare, ſi ponatur $\frac{r}{s} = m$, & $\frac{p}{q} = n$; erit, ex æqua ratione, ut x^n ad a^n, ita y^m ad b^m; atque idcircò æquatio erit ut ſupra $b^m x^n = a^n y^m$.

CAPUT

CAPUT X.

De Cycloìde, & Epicycloìde Recentiorum.

INquisivimus hactenus earum Curvarum Mechanicarum naturam, quas Veteres Geometræ excogitarunt: & methodum tradidimus alias in infinitum ad ipsarum similitudinem efformandi. Restat modò, ut ad Curvas Mechanicas gradum adhùc faciamus, quas ipsi Geometræ Recentiores contemplati sunt. Cumque inter eas primum locum obtineat Curva illa, quæ Cycloidis nomine nuncupatur; de ea primùm peragendum suscipiemus. Atque illam primus omnium consideravit Galileus Magni Etruriæ Ducis laudatissimus Mathematicus: tùm ipsam eandem paullò adcuratiùs sunt prosequuti præclari duo Geometræ Torricellius Faventinus in Italia, & Robervallius in Galliis. Denique propter ipsius insignes usus, ac proprietates ab aliis quoque posterioribus Geometris pluris ea habita fuit. Quin etiam nonnulli integros, justosque de hac Curva libros conscripsere: atque Historicus Memorabiliorum, quæ in Regia Scientiarum Academia Parisiensi acta sunt; fatetur, nullam aliam Curvam lineam tantâ diligentiâ Recentiores Geometras pertractasse, quantâ Cycloidem Galilei.

Ut autem hujus Curvæ claram, distinctamque notionem præbeamus; intelligatur circa rectam lineam AB, tanquam diametrum, descriptus Circulus ACB,

Fig. 97. ex cujus circumferentia ducantur ad ipsam diametrũ ordinatæ quævis CM; eæque protrahantur usque ad puncta

puncta N; sed ita tamen ut portiones ipsarum CN sint æquales arcubus correspondentibus AC; & erit Curva pertransiens per puncta illa N ipsa Cyclois Galilei: cumque in puncto B extremo altero diametri AB ordinata CM evanescat; ducenda est ex puncto illo recta linea BD ipsi MN parallela; quæ sit æqualis semicircumferentiæ ACB; atque idcircò tota recta linea DBD, quæ dicitur Basis descriptæ Cycloìdis DAD, æqualis erit integræ circumferentiæ ipsius Circuli, qui Circulus *Genitor* nominatur.

Ex quo patet, hujus Curvæ eam esse præcipuam proprietatem, ut quævis ejus ordinata MN [*ead. Fig.*] adæquet ordinatam Circuli correspondentem CM una cum correspondente arcu AC. Nam reverà ipsam Circuli ordinatam CM eô usque in N protraximus, ut CN sit æqualis ipsi AC. Qua de re, si diameter Circuli AB dicatur a; ponaturque abscissa $AM = x$; ordinata $MN = y$; & arcus $AC = z$, quia per Circuli naturam habetur $CM = \sqrt{ax-xx}$, erit Cycloìdis æquatio $y = \sqrt{ax-xx} + z$, sive $y - z = \sqrt{ax-xx}$; aut etiam $yy - 2yz + zz = ax - xx$. Sed non tamen ideò Curva ista Geometrica putanda est. Etenim, cum inventa æquatio ex triplici constet incognitâ; nam præter abscissam x, & ordinatam y, reperitur in ea tertia ingnota z, quæ valorem designat arcus correspondentis AC; profectò si alia æquatio invenienda esset pro relatione, quæ est inter abscissam AM, & arcum AC; hæc ad infinitas dimensiones adscenderet: & consequenter si in æquatione Cycloidis modò inventa substituendus esset valor ipsius z per abscissam x expressus, ut duæ tantùm incognitæ magnignitudines relinquerentur, scilicet abscissa x, & ordinata y: quæ inde orietur æquatio ad infinitas item dimensiones adscenderet: atque ideo ipsa Cyclois erit generis infinitesimi: proindeque Curva erit Mechanica Transcendens, ac Geometricè irrationalis.

Jam vero cum in Cycloide D*B*D portio cujusque ordinatæ CN adæquet arcum Circuli correspondentem AC; palam est, quòd, si ex puncto N ducatur recta NE parallela ei, quæ ducitur ex *C* ad B, portio basis BE sit etiam æqualis arcui A*C*: cùm, propter parallelogrammum *B*N, æqualia sint ejus latera opposita BE, CN. Quocircà, si Circulus A*C*B ita revolvi intelligatur super rectam lineam BD, ut semicircumferentiâ suâ emetiatur ipsam BD, cui eadem ex constructione est æqualis; perspicuum est, punctum ipsius A hoc motu describere cetera puncta semicycloidis AND. Etenim, si super ipsa NE describatur segmentum Circuli simile, & æquale alteri C*B*; quia parallelæ sunt rectæ lineæ C*B*, NE, eædem erunt eorum segmentorum positiones; atque ideò, quemadmodum recta linea BD contingit segmentum primum in puncto *B*, ita, etiam continget segmentum secundum in puncto E. Unde, si segmentum istud secundum extendatur versùs E, ut habeatur integer semicirculus NE*F*; hic jacebit totus supra rectam *B*D: & quia æquales sunt semicirculi ACB, NEF; æqualesque etiam portiones CB, NE; erunt similiter æquales portiones reliquæ AC, EF: cùmque ipsi AC æqualis ostensa sit portio basis BE, erit eadem *B*E ipsi EF æqualis: idcircoque erit FEN positio semicirculi BCA in puncto E; cùm ejus circumferentia rectam lineam *B* D emetiatur: proindeque punctum ejus A reperietur in puncto Cycloidis N: atque ita motus semicirculi BCA illud designabit. Fig. 98.

Hinc

Hinc genesis Cycloidis ex Circuli circumvolutione vulgò repeti solet; nempè si Circulus aliquis super aliqua recta linea subinde revolutus intelligatur, ut præter motum progressivum habeat quoque motum circularem; nam punctum, quo ipse Circulus prima sua positione rectam illam lineam contingit, describet lineam Curvam, quam ex modo ostensis perspicuum est, Cycloidem esse Galilei: cumque, completa prima circumvolutione, possit idem Circulus super eadem recta linea circumvolutiones alias habere in infinitum; palam est, Cycloides alias hoc pacto in infinitum describi, quæ dici poterunt Prima, Secunda, Tertia; pro ut primâ, secundâ, aut tertiâ ejus Circuli circumvolutione generantur. Proindeque, cum omnes has Cycloides, quæ unicam Curvam lineam, utpote ejusdem Circuli motu descriptæ, constituunt, possit una, eademque recta linea in infinitis punctis secare; perspicuum est, Curvam istam esse generis infinitesimi; ac proinde ejus æquationem, ut superiùs indicavimus, ad dimensiones infinitas adscendere. Figura 99.

Porrò, cum integra basis Cycloidis DBD sit æqualis circumferentiæ integræ Circuli genitoris AC*B*; liquet, quòd, si per punctum A ducatur recta AF ipsi DBD parallela; & compleatur rectangulum DF; quòd, inquam, rectangulum istud æquale sit quadruplo ipsius Circuli genitoris. Etenim, cum area Circuli genitoris producatur, multiplicando ipsius circumferentiam integram per dimidium semidiametri; vel, quod idem est, multiplicando basim Cycloidis DBD per dimidium semidiametri; & area rectanguli DF, multiplicando eandem basim Cycloidis D*B*D per ipsam diametrum A*B*; erit area Circuli genitoris ad aream rectanguli DF, veluti dimidium semidiametri ad diametrum ipsam A*B*: proindeque, quia dimidium Figura 100.

dium

dium semidiametri quarta pars est ipsius diametri AB; erit etiam area Circuli genitoris quarta pars areæ rectanguli DF: atque idcircò ipsum rectangulum DF quadruplum erit Circuli genitoris.

Sed, cum hoc rectangulum dividatur per ipsam Cycloidem in duo alia spatia, (quorum, quod basi DBD terminatur in duas partes per constructionem æquales divisum, dici solet spatium Cycloìdale internum; quod verò superest in duas quoque partes discissum æquales, spatium Cycloìdale externum) ipsam proportionem, quæ est inter hæc duo spatia, Recentiores Geometræ adinvenerunt. Nempè, quòd spatium Cycloìdale internum sit triplum spatii Cycloìdalis externi: & rectè id demonstrarunt. Hinc autem deducitur, spatium Cycloìdale externum æquale esse Circulo genitori; atque ideò spatium Cycloìdale internum triplum quoque esse ipsius Circuli genitoris. Etenim, cùm rectangulum DF [*ead. Fig.*] per Cycloidem ita dividatur, ut spatium Cycloìdale externum tertia pars sit spatii Cycloìdalis interni, erit idem spatium Cycloìdale externum quarta pars ipsius rectanguli DF. Quamobrem, quia Circulus genitor est similiter quarta pars ejusdem rectanguli DF, erit spatium Cycloìdale externum æquale Circulo Genitori; atque ideo ipse Circulus Genitor, perinde ac spatium Cycloidale externum, tertia pars erit spatii Cycloidalis interni.

Quoniam verò spatium Cycloìdale internum per diametrum *AB* (*ead. Fig.*) in duas partes æquales dividitur, perinde ac ipse Circulus Genitor, per genesim Cycloìdis, uti diximus; erit spatium Semicycloìdale internum ABDA triplum quoque semicirculi Genitoris A*B*CA: & idcircò spatium intermedium ACBDNA duplum erit ejusdem semicirculi Genitoris A*B*CA. Unde cum rectangulum AD sit æquale duplo Circuli Genitoris, erit spatium Cycloìdale externum ADFA æquale semicirculo Genitori: proindeque simul adæquabunt spatium Cycloìdale intermedium ACBDNA.

Præterea illud a Geometris ostensum est, quòd scilicet si recta MN sit ordinata quævis Cycloidis AND; & per punctum N agatur recta NO ipsi AB parallela; quòd, inquam, spatium Cycloidale externum ANO æquale sit spatio Circulari correspondenti AMC. Unde duo deducuntur cognitu digna: nempè primò quòd, si ordinata MN incidat in centrum Circuli Genitoris, quadratura spatii Cycloidalis intermedii ACN haberi possit absque posita quadratura Circuli; cùm ipsum spatium Cycloìdale intermedium ACN proveniat æquale Quadrato, quod fit ex radio ipsius Circuli genitoris. Nam, quia MN ordinata supponitur incidere in centrum Circuli; erit tàm abscissa AM, quàm portio ordinatæ MC ejus Circuli radius: atque idcircò portio altera ordinatæ CN æqualis circumferentiæ Quadrantis AC. Unde, cum rectangulum AN sit æquale duobus rectangulis, uni nempè, quod fit ex AM in MC; & alteri, quod ex AM in CN: profectò, quia rectangulum ex AM in MC est æquale quadrato radii AM; & rectangulum ex AM in CN est æquale duplo Quadrantis AMC; erit idem rectangulum AN æquale quadrato radii AM, unà cum duplo Quadrantis AMC: & propterea rectangulum ipsum AN diminutum duplo Quadrantis AMC, æquale erit quadrato solius radii AM. Jam verò, cùm spatium Cycloìdale ANO sit æquale segmento Circulari correspondenti AMC; rectangulum AN duplo Quadrantis AMC diminutum est æquale spatio Cycloìdali intermedio ACN. Igitur, cum ordinata MN incidit in centrum Circuli Genitoris, spatium Cy-

Figura IOI.

Cycloidale intermedium A C N est æquale quadrato, quod fit ex radio ipsius Circuli Genitoris.

Alterum quod deducitur illud est; quòd, si eadem ordinata MN incidat in aliud punctum diametri Circuli genitoris AB, cujus centrum E; sed
Figura 102.
ita tamen ut abscissa AM sit quarta pars ipsius AB; & consequenter dimidia radii AE; quòd, inquam, spatii Cycloidalis AMN quadratura possit quoque haberi absque posita Circuli quadratura; cùm ipsum spatium Cycloidale AMN exstet æquale triplo trianguli ACM. Quoniam junctâ CE, cum rectangulum AN sit æquale duobus rectangulis, uni scilicet, quod fit ex AM in MC, & alteri, quod fit ex AM in CN; profectò, quia AM dimidia supponitur radii AE; atque ideò rectangulum ex AM in MC est æquale sectori AEC; erit idem rectangulum AN æquale rectangulo AMC unà cum sectore AEC. Unde, cùm spatium Cycloidale externum ANO sit æquale segmento Circulari correspondenti AMC; si ab rectangulo AN auferatur spatium Cycloidale externum ANO; & ex rectangulo AMC unà cum sectore AEC dematur spatium Circulare AMC, supererit spatium Cycloidale AMN æquale rectangulo AMC, unà cum triangulo CME: & propterea, quia rectangulum AMC est æquale duplo trianguli ACM; & propter bases æquales AM, ME, eidem triangulo ACM est æquale etiam triangulum CME, erit idem spatium Cycloidale AMN æquale triplo trianguli correspondenti ACM.

Porrò præter hanc Cycloidem, quæ Primaria dici solet; duas alias Cycloides excogitarunt Recentiores Geometræ, unam quidem *Protractam*, *Contractam* verò alteram. Nam, quemadmodum in Cycloide

primaria portio cujusvis ordinatæ CN [*ead. Fig.*] est æqualis arcui correspondenti AC; ipsaque ideò basis BD æqualis semicircumferentiæ ACB; ita considerarunt, fieri posse, ut eadem portio ordinatæ CN sit ad arcum suum correspondentem AC in qualibet alia data ratione; ex. gr. *m* ad *n*: & hac consideratione illæ duæ aliæ Cycloides ipsis subortæ fuerunt. Etenim, sicuti cum habetur magnitudo *m* æqualis magnitudini *n*, oritur ipsa Cyclois primaria; quia ratio fit æqualitatis; ita etiam si magnitudo *m* fuerit primò major magnitudine *n*, fiet locus Cycloidi *Protractæ*; cum ejus basis *B* D major fiat semicircumferentiâ ACB. Et, si secundò magnitudo *m* minor fuerit eadem magnitudine *n*, habebitur Cyclois altera *Contracta*; quia basis ipsius *B* D redditur vicissim semicircumferentiâ ACB minor.

Sed hæ interim Cycloides cùm non multùm inter se differant; & ex proprietatibus jam cognitis Cycloidis primariæ nullo negotio deduci queant proprietates tàm Cycloidis protractæ, quàm Cycloidis contractæ; supervacaneum existimo de iis plura subjungere. Quocircà aliam Curvam lineam considerandam suscipimus *Epicycloidem* dictam; quoniam etsi ad Cycloidis similitudinem sit ea excogitata; multum tamen abest, ut ex proprietatibus Cycloidis proprietates illius possint deduci: quin etiam talis naturæ deprehenditur, ut potiùs ex ejus proprietatibus proprietates Cycloidis eruantur. Nam intelligitur generari ex revolutione unius Circuli super alium Circulum; cujusmodi est Curva AND descripta ex revolutione Circuli *ACB* super alium Circulum BDE; ita ut integra Curvæ basis DBD, perinde ac in Cycloide, sit æqualis circumferentiæ integræ Circuli genitoris *ACB*. Hinc enim consectatur, quòd, si centrum F secundi Circuli BDE abeat in infinitum; quia
Figura 103.

quia hoc casu ipsius circumferentia recta linea evadit; ipsa Curva AND in Cycloidem vulgarem immutatur; & propterea proprietates omnes subeat Cycloidis ordinariæ.

Ex ipsa autem hujus *Curvæ* genesi deducitur, quòd, si Circulus Genitor ACB intelligatur pervenisse ad positionem NGH, ut propterea describat Epicycloidem AN; quòd, inquam, centro F, & intervallo FN descripto Circulo NCM, qui secet Circulum Genitorem ACB in puncto C, abscissus arcus AC sit æqualis arcui *BG*. Nam, quia Circulus NGH contingit Circulum BGD in puncto G, ductus radius FG pertransibit per centrum ipsius semicirculi NGH: idcircoque erit angulus NFG æqualis angulo *CFB*; atque ideò, quia latera NF, FG æqualia sunt lateribus CF, FB alterum alteri; erit basis unius trianguli NG æqualis basi alterius trianguli CB. Sed in Circulis æqualibus æquales chordæ æquales arcus abscindunt; igitur, cum chorda NC æqualis sit chordæ C*B*; erunt etiam æquales arcus NG, C*B*; & consequenter æquales quoque arcus reliqui GH, AC. Jam verò propter ipsam genesim Epicycloidis arcus GH est æqualis arcui BG; quare erit etiam eidem arcui BG æqualis ipsemet arcus AC.

Figura 104.

Unde patet etiam, quòd idem arcus AC (*ead. Fig.*) adæquat portionem in circumferentia Circuli *B*D similem arcui intercepto CN. Nam, cum angulus NFG sit æqualis angulo *C*F*B*, erunt quoque æquales arcus, quibus insistunt, NO, CM. Et propterea erunt etiam æquales arcus NC, OM. Unde, quia arcus OM similis est arcui BG, cum ambo eumdem angulum subtendant, erit etiam eidem arcui BG similis arcus NC. Sed arcui *B*G ostensus est æqualis arcus AC: quare arcus AC adæquabit portionem in circumferentia Circuli *B* D similem arcui intercepto CN.

Atque hinc expedita nobis subnascitur Epicycloidem in plano per puncta describendi ratio: scilicet, si sumptâ in circumferentia Circuli Genitoris portione quavis AC, [*ead. Fig.*] abscissâque ex circumferentia alterius Circuli portione alterâ BG, quæ ipsi AC sit æqualis, fiat angulus GFN æqualis angulo AFC. Nam, descripto deinde ex centro F arcu MN, qui transeat per punctum C; hic occurret rectæ lineæ FN in puncto N, quod erit in Epicycloide quæsita: & eadem ratione cetera alia ejus puncta invenientur.

Porrò circa hanc Curvam tres casus distinguere oportet pro triplici relatione, quam habere possunt Circuli ACB, BGE. Nam primò, vel Circulus Genitor AC*B* est æqualis alteri Circulo *B*GE; & quia æquales sunt etiam ipsorum circumferentiæ; basis Epicycloidis erit integra circumferentia alterius Circuli *B*GD: proindeque ipsa Epicyclois erit tamquam Ovalis circa diametros A*B*, BE ipsorum Circulorum, veluti unam rectam lineam, descripta. Atque hoc casu perspicuum est, Epicycloidem non tàm fieri per revolutionem Circuli ACB super circumferentia alterius *B*GE, quàm per revolutionem Circuli *B*GE super circumferentia prioris AC*B*. Secundò vel idem Circulus Genitor ACB minor est Circulo altero *B*GE; & quia circumferentia illius minor est quoque circumferentiâ alterius hujus Circuli; basis Epicycloidis minor adhùc erit circumferentiâ Circuli B*G*E: atque ideò ipsa Epicyclois ad punctum E extremum alterum diametri hujus Circuli non pertinget. Vel denique Circulus Genitor ACB major est Circulo *B*GE; & quia major est quoque ipsius circumferentiâ; erit basis Epicycloidis major etiam circ-

Figura 105.

Figura 106.

Figura 107.

circumferentiâ Circuli BGE: atque ideò partes ipsius Epicycloidis se se intersecabunt propè extremum alterum diametri E; cùm portio, quæ ex dextra incipit, desinat ad sinistram; & vicissim portio, quæ incipit a sinistra, desinat detrorsum.

Jam verò Curva isthæc non in omni casu deprehenditur Mechanica, & naturæ trascendentis; sed tantùm cum radii Circulorum ACB, BGE, eam inter se habent proportionem, quæ nullis quidem numeris exprimi potest. Nam primò, si Circulus Genitor ACB adæquet Circulum alium BGE; quia, ex nuper ostensis, portio quævis circumferentiæ Circuli Genitoris AC adæquat portionem aliam in circumferentia alterius Circuli BG similem arcui intercepto CN; & propter æqualitatem eorum Circulorum, portio AC non modo est æqualis, sed etiam similis portioni BG; erit eadem portio AC similis quoque arcui intercepto CN: & consequenter, si punctum H sit centrum Circuli genitoris ACB, erit angulus AHC æqualis angulo CFN. Unde Epicyclois hoc casu Geometricè describetur: scilicet, si in centro Circuli genitoris sumpto quoquis angulo AHC; fiat in centro alterius Circuli angulus CFN æqualis priori AHC; quandoquidem, existente FN ipsi FC æquali, erit N punctum Epicycloidis: & proinde ipsa Curva naturæ evadet Geometricæ.

Figura 108.

Secundò eadem Curva AND deprehenditur quoque naturæ Geometricæ, quotiescunque radii ipsorum Circulorum ACB, BGD non quidem sunt æquales, sed quamvis inter se habeant proportionem, quæ numeris exprimi possit. Quippè, cum per generalem Epicycloidis proprietatem, arcus CN similis sit arcui BG, erit angulus BFG æqualis angulo CFN: & consequenter, cum similes sint sectores FBG,

Figura 109.

FBG, FCN; erit ut FB ad BG, ita FC ad CN; atque ideo arcus BG divisus per radium BF æqualis erit arcui CN diviso per radium FC; inde est, ut punctum Epicycloidis N inveniatur; si constituto in centro Circuli Genitoris angulo AHC, fiat ut radius BF unius Circuli ad radium AH alterius, ita angulus assumptus AHC ad angulum CFN; quippè existente FN ipsi FC æquali, erit etiam N punctum Epicycloidis.

Etenim si fiat angulus BFG [*ead. Fig.*] æqualis angulo CFN, erit similiter ut radius BF ad radium AH, ita angulus AHC ad angulum BFG. Sed angulus AHC est ad angulum BFG, ut arcus AC divisus per radium AH, ad arcum BG divisum per radium BF: quare erit, ex equa ratione, ut radius BF ad radium AH; ita arcus AC divisus per radium AH ad arcum BG divisum per radium BF. Et consequenter arcus AC æqualis erit arcui BG; unde, cùm propter angulos æquales BFG, CFN, similes sint arcus BG, CN; erit arcus AC æqualis arcui BG; qui est similis arcui intercepto CN: propterea que punctum N erit in Epicycloide quæsita.

Jam verò, quia tùm dumtaxat inveniri potest Geometricè, sive per Curvam Geometricè rationalem angulus CFN, (*ead. Fig.*) ad quem angulus adsumptus AHC sit ut radius BF ad radium AH; quotiescunque proportio ipsorum radiorum BF, AH numeris exprimitur; & nequaquàm cum eadem proportio nullis quidem numeris potest designari, ut Geometræ norunt: hinc est, ut Epicyclois eo dumtaxat casu deprehendatur naturæ Mechanicæ, ac trascendentis, cum proportio radii BF ad radium AH rationalis existit. Quod etiam ostendi potest ex eo, quia, existente irrationali proportione radiorum, irrationalis fit etiam proportio, quæ inter ipsas

ipsas circumferentias intercedit. Et idcircò, si Circulus Genitor ACB, completâ primâ revolutione, intelligatur adhùc revolui super circumferentiâ alterius Circuli BGD, ut faciat secundam, tertiam, quartam revolutionem, punctum describens nunquam perveniet ad primum illud punctum, in quo cœperat Circulus Genitor moveri; atque ità describet Curvam, quam in infinitis punctis poterit recta linea secare.

Figura 110.

Æquatio verò algebrica Epicycloidis primo casu descriptæ Circulorum æqualium ACB, BGE (*Fig.* 108. *pag.* 200.) facile obtinebitur; si, positis omnibus, uti ibidem; & ductâ ex puncto N Curvæ quæsitæ lineâ NM normali ad datam FEBHA, sint FM abscissæ x; atque MN ardinatæ y. Nam, junctis HC, CF, & FN, quæ secet Circulum BE in D; ex D ducatur normalis DO ad FC. Est quidem quadratum FN æquale quadratis ex NM, MF: quare expressus ejus valor habebitur. Atqui NF = CF. Idcircò in triangulo CHF latera CH, HF nota erunt, & data; denominatum verò latus FC. Igitur denominatus habebitur sinus anguli CHF, seu CHA. Sed hic sinus æqualis sinui DO anguli DOF, qui esse debet æqualis angulo CHA: & Circuli sunt æquales. Igitur, positâ ex N ductâ normali NG ad radium FC Circuli NC concentrici cum BE; quique per N, & C semper pertransit; habebitur, per similitudinem triangulorum FDO, FNG, expressus valor ipsius NG. Atqui, si ex D ducatur alia DI normalis ad FB radium Circuli ipsius BE; valor etiam expressus illius quidem erit per similitudinem triangulorum FNM, FDI. Ergo, cùm sit NG ad NM, uti DO ad DI; & omnium inventæ sint expressiones valorum; obtinebitur quæsita æquatio Epicycloidis; quæ ejus naturam propiùs, ac perspectiùs nobis repræsentabit. Se-

Secundo casu Circulorum inæqualium ACB, BGD (*Fig.* 109. *pag.* 200.); quorum radii rationem mutuam habeant numeris expressam; comparare etiam nobis facile æquationem algebricam Curvæ naturam continentem possumus, eadem ferme analysi. Etenim, positis omnibus plane uti in primo casu; denominatus sinus CP anguli CHA, uti modo inventus est, pro ignotâ erit accipienda, cùm sit normalis ad HA, in inveniendo sinu anguli, qui ad ipsum CHA datam habeat rationem, quæ est inter dictos radios Circulorum. Acceptâ verò hac ignotâ; dein secundum proportionem, quæ interesse debet inter sinum anguli unius CHA ad sinum alterius anguli DFO, qui rationem imperatam mutuò servent, invenietur expressus valor sinûs DO anguli DFO. Hoc pacto. Sit ex. gr. ratio radiorum HA, FB jussa uti 1 ad 3. Igitur angulus DFO, seu arcus DK illum subtendens debet esse triplus anguli CHA, seu arcûs CA. Soluto autem problemate trisectionis anguli, jam noscitur proportio sinûs CP anguli CHA, qui sit tertia pars quæsita anguli dati, ad sinum ipsiusmet anguli dati in tres æquales partes dividendi. Quare, cùm debeat esse DFO triplus anguli CHA; & cũ habeamus notam dictam proportionem, quæ dicatur p ad r; & denominatus sit sinus ipse CP; denominatus quoque erit per quartam proportionalem sinus DO ignotis x, & y, in ratione, in qua duo termini sunt p, & r, tertius verò ipsa CP denominata eisdem ignotis x, & y. Hoc sinu DO denominato in Circulo BE, cetera fiant uti supra: & exoptatam habebimus æquationem; quæ hoc secundo casu descriptam Epicycloidem demonstrabit. Atque ita de reliquis casibus rationis imperatæ dictorum angulorum, seu radiorum.

Ratio radii Circuli A C superioris ad radium Circuli B E inferioris accepta est, uti nosti, minoris ad majus. Si proposita fuerit ratio illa majoris ad minus; tum origo abscissarum Epicycloidis F accipiatur à centro H Circuli A B; qui immutabitur in Circulum inferiorem. Item sine hac immutatione originis abscissarum Epicycloidis, idem conficietur eadem, qua supra, viâ. Nam, quia, inventâ anguli trisectione, ut eidem exemplo insistatur, noscitur probe, uti diximus, proportio sinus anguli trientis anguli dati, qui sinus in nostro casu est ipsa D O, ad sinum anguli dati in tres partes æquales secandi, qui est in nostro casu ipsa C P; si profecto hæc ratio inter hos duos sinus dicatur eodem modo p ad r; denominata sane quoque erit eodem modo ignotis x, & y ipsa D O, per quartam proportionalem, in ratione, cujus duo termini sunt p, & r, tertius verô ipsa C P denominata, uti modò supra, eisdem positis ignotis x, & y. Ex hac verò inventione æquationis utriusque casus descriptæ Epicycloidis noscitur necessitas rationis inter duos inæqualium Circulorum radios, quæ numeris exprimi possit.

CAPUT

CAPUT ULTIMUM.

Curvæ aliæ Mechanicæ.

Explicatâ naturâ tàm Cycloidis, quàm Epicycloidis, quæ sunt principes Curvæ Mechanicæ à junioribus Geometris excogitatæ, nunc alias Curvas strictè perstringemus, quæ passim circumferuntur. Et primò Curva Logistica, sive Logarithmica occurrit; sic dicta, quòd Logarithmorum inventioni sit usui. Ejus autem genesis in hunc modum à Geometris concipitur. Sumantur in recta linea indefinita A B portiones quæcumque æquales AC, CD, DE, EF; & ex punctis A, C, D, E, F ad rectos angulos erigantur totidem aliæ rectæ lineæ AN, CN, DN, EN, FN, quæ sint in progressione Geometrica, ut A N sit ad CN, veluti est CN ad DN; & C N sit ad D N, ut DN, ad E N, atque ita deinceps. Porrò, unaquaque harum portionum bisecta, excitentur ex punctis sectionum totidem aliæ perpendiculares; quæ sint mediæ proportionales inter proximas collaterales: atque ejusmodi bisectio tamdiù peragatur, donec perpendiculares, quæ ex punctis sectionum eriguntur, fiant sibi quàm maximè vicinæ: his enim effectis, pertransibit per extremitates earum perpendicularium Curva linea N N; quæ Logisticæ, sive Logarithmicæ nomen accepit: quandoquidem ex ipsa genesi palam est, quòd, existentibus ejus abscissis in arithmetica progressione, ordinatæ iis abscissis insistentes progressionem constituant Geometricam, quæ est proprietas præcipua Logarithmorum. Figura III.

Hinc præcipuus hujus Curvæ usus in Logarithmorum natura, & inventione explicanda se prodit.

Nam

Nam primò, si ejusmodi Curva Linea esset in spatio ingentiori adcuratè designata, ut portiones primo loco adsumptæ AC, CD, DE, EF [*ead. Fig.*] tantæ essent magnitudinis, ut singulæ per plures bisectiones subdividi possent non modò in centum, aut mille, sed in decem, aut centum mille particulas æquales; positâ quidem AC partium 100000, ut ita sit punctum A partium 00000, foret AD partium 200000: AE partium 300000. atque ita deinceps: proindeque, si perpendiculares AN, CN, DN, EN ponantur esse in ea Geometrica progressione, quæ incipiens ab unitate crescit in decuplum, ita ut positâ AN 1, sit CN 10, DN 100, EN 1000; atque ita deinceps; certò numeris Geometricè proportionalibus, 1. 10. 100. 1000. correspondebunt numeri alii arithmeticè proportionales, tanquam Logarithmi primarii, 00000. 100000. 200000. 300000. . . . Unde jam cuilibet dato numero intermedio facilè posset suus logarithmus adsignari. Quippè si datus numerus fuerit numerus 9. abscisâ ex linea principali BN portione BF, quæ sit ad perpendicularem AN, ut 9. ad 1. ductâque per punctum F rectâ lineâ FO ipsi AB parallelâ, quæ secet descriptam Curvam in puncto O; portio AM, quam ex ipsa AB abscindit demissa perpendicularis OM, logarithmus erit quæsitus.

Figura 112.

Quòd si verò arduum videatur figuram adeò grandem, & exactam delineare, ut ita difficile sit hac ratione Logarithmos invenire; attamen clarissimus talis delineationis modus evidentem rationem nobis aperit arithmeticam, quo viri ingeniosi usi sunt in condendis Tabulis Logarithmorum; quas summa operantium sollertiâ, & facilitate jam habemus: scilicet invenerunt ii continue medias proportionales arithmeticas inter duos quosvis logarithmos jam notos, & medias proportionales Geometri-cas

cas inter duos numeros vulgares logarithmis iis correspondentes: sicuti in delineanda ipsa Curva logarithmica portiones priores bisecantur; & ex punctis sectionum perpendiculares totidem eriguntur; quæ sint mediæ proportionales Geometricè inter proximas collaterales. Sed hæc fusiùs prosequi non est hujus loci: & satis sit, ea indicasse, ut usus adlatæ Curvæ innotescat. Nam integrum logarithmorum libellum non est nobis propositum exhibere; in quo solent, præter logarithmos ordinarios, hyperbolici quoque logarithmi explicari. Ceteroquin qui logarithmicæ Curvæ Proprietates omnes cupiat, easque Veterũ more velit demonstratas, adeat præclarum opus P. Guidonis Grandii nostri Mathematici, in quo Hugenianorum Theorematum demonstrationes traduntur. Nam occasione horum Theorematum non modò proprietates theorematibus iis comprehensas, verùm alia quoque permulta doctissimè quidem, & Geometricè persequitur.

Occurrit secundo loco Spiralis Logarithmica, quæ tale quoque nomen sortita est, quòd logarithmorum proprietas in ea similiter deprehendatur. Ejus enim natura talis constituitur, ut si ex centro ipsius A ducatur ad aliquod ejus punctum recta linea AM; eamque contingat in eodem puncto M recta linea MT; quòd, inquam, angulus AMT radio AM, & tangente MT comprehensus sit semper ejusdem magnitudinis, quocumque in loco Spiralis punctum M accipiatur. Ex quo deducitur, quòd, existentibus angulis in centro æqualibus, atque ideò componendo, Arithmeticè proportionalibus; radii eos angulos constituentes Geometricam servent progressionem: quippè si ex centro A ducantur ad spiralem plures radii AM, AN, AO, AP; qui sint inter se indefinite proximi; & efficiant in centro A an-

Figura 113.

angulos MAN, NAO, OAP æquales, & indefinite parvos; ut ita componendo anguli MAN, MAO, MAP sint arithmeticè proportionales; certò, propter radiorum indefinitam propinquitatem, portiones interceptæ Spiralis MN, NO, OP tanquàm totidem rectæ lineæ indefinitæ parvitatis sumi poterunt; quæ se confundant cum tangentibus, quæ ducuntur ad puncta Spiralis M, N, O. Unde jam, cùm propter naturam Spiralis æquales quoque sint anguli AMN, ANO, AOP; æquiangula erunt triangula MAN, NAO, OAP: atque ideò inter se similia. Idcircoque erit ut AM, ad AN, ita AN, ad AO; & ut AN ad AO, ita AO ad AN.

Figura 114. Occurrit tertio loco Spiralis Parabolica sic dicta, quòd Apollonianæ Parabolæ naturam præsefe-rat. Intelligitur namque generari, si ex centro alicujus Circuli A ductis ad ipsius circumferentiam radiis AM, fiat semper ut rectangulum, quod fit ex recta quadam linea constanti (quam parametrum, sive latus rectum nominare licet) in arcum aliquem BM sit æquale quadrato portionis MN sumptæ in correspondente radio AM. Nam hoc pacto, considerando ipsos arcus BM tamquam abscissas, & portiones MN veluti ordinatas abscissis iis correspondentes; erit, perindè ac in Parabola Apollonianæ, quadratum cujusque ordinatæ æquale rectangulo, quod fit ex parametro, sive latere recto in abscissam correspondentem. Atque ideo duarum, aut plurium ordinatarum quadrata habebunt inter se eamdem rationem, quam habent abscissæ correspondentes. Sed facile est ad hujus similitudinem spirales alias in infinitum effingere. Nam, sicuti Parabolas alias consideravimus, in quibus non modò quadratum, sed quævis ordinatæ potestas adæquet productum homogeneum, quod fit ex alia inferiori potestate lateris recti in potestatem reliquam abscissæ correspondentis; ita quoque Spirales aliæ hanc eamdem naturam habentes considerari poterunt: proindeque ea omnia, quæ superiùs de infinitis Parabolis dicta sunt, ad ejusmodi quoque Curvas poterunt accomodari.

Et denique consideranda est Curva quædam, quam Cycloidem dimidiatam dicere soleo; cùm generari intelligatur per adplicationem arcus alicujus Circuli suis abscissis correspondentibus. Si ACB fuerit Circulus aliquis, cujus diameter sit recta AB, & ad eam adplicentur ordinatæ CM; sane protractis hisce ordinatis usque ad puncta N; sed ita tamen, ut quælibet ipsarum MN adæquet arcum correspondentem AC, transibit per puncta ista Curva linea AND; quæ erit illa eadem, quam hic ponimus Curvam. Unde hujus Curvæ ea est proprietas, ut quævis ipsius ordinata MN adæquet arcum in Circulo genitore correspondentem AC; cùm tamen in Cycloide eadem ordinata MN adæquabat arcum AC, unà cum correspondente ordinata Circuli genitoris CM. Hinc palam est, Curvam istam esse Cycloidem dimidiatam; quandoquidem si in Cycloide intelligatur Circulus genitor ad diametrum reductus, eousque, ut evanescant omnes ipsius ordinatæ CM, ipsa Cyclois in hanc Curvam immutabitur. Figura 115.

Quocircà ex cognitis Cycloidis proprietatibus facile erit alterius hujus Curvæ proprietates deducere. Nam primò, quemadmodum in Cycloide spatium sub ipsa, & basi comprehensum triplum est Circuli genitoris; ita in hac Curva spatium, (*ead. Fig.*) quod sub ipsa & basi continetur duplum esse debet Circuli genitoris; cum nil aliud sit, quàm ipsum illud spatium Cycloidale Circulo genitore diminutum. Unde consequens est secundò, ut spatium, quod

quod à Curva, & circumferentiâ Circuli genitoris, ac basi comprehensum est, ipso Circulo fit æquale: & tertiò, ut, descripto circa ipsam Curvam rectangulo, quia ejusmodi rectangulum est quadruplum Circuli genitoris, cùm fiat ex ipsius diametro in Curvæ basim, quæ est æqualis integræ circumferentiæ Circuli genitoris; spatium externum fit æquale spatio interno: & consequenter duplum quoque Circuli genitoris.

Ceterum noscendum est, figuram ipsius Curvæ talem esse, qualem subjectū Schema nobis exhibet: nempè, ut a vertice A usque ad ordinatam centro Circuli genitoris correspondentem GF sit concava ex parte interiori, & convexa ex parte exteriori; ac vicissim, ut ab eadem ordinata GF, usque ad basim sit convexa ex parte interiori, concava autem ex parte exteriori. Atque oritur hujusmodi conversio; quia, si compleatur circa Curvam ipsam rectangulum, & in utraque ejus portione ordinatæ usque ad rectangulum producantur; ordinatæ portionis prioris sint æquales complementis, quæ ordinatis secundæ portionis propter rectangulum adjunguntur: & vicissim ordinatæ secundæ portionis æquales complementis, quæ prioris portionis ordinatis propter idem rectangulum adjunguntur. Hinc enim fit, ut secunda portio sit ipsa prior; nisi quòd istius puncta referantur ad diametrum Circuli genitoris; cùm tamen puncta illius latus rectanguli sibi vicinum respiciant.

Figura 116.

F I N I S.

ADPRO-

ADPROBATIO

JUssu Reverendissimi P. Præpositi Generalis nostri Ordinis attente perlegimus Librum, cui titulus, *De Lineis curvis Liber* = à R. P. D. Johanne Baptista Caracciolo nostri Ordinis Presbytero, & in Pisano Licæo Publico Philosophiæ Professore compositum. Cùm in eo nihil Christianæ Religioni, bonisque moribus contrarium deprehenderimus; dignum esse censemus; quo ad id, quod ad nostram adprobationem spectat, ut typis mandetur. Dat. in nostris Ædibus S. Mariæ Montis Nigri in Agro Liburnensi die 18. Aprilis 1740.

P. D. Petrus Cajetanus Masetti C. R. Præpositus Domûs. Sac. Theol. Prof.

P. D. Franciscus Maria Donati C. R. Vicarius Domûs, Sac. Theol. Profess.

HOc Opus Mathematicum *De Lineis Curvis* à R. P. D. Jo. Baptista Caracciolo nostræ Congregationis Theologo, & in Academia Pisana Philosophiæ Doctore compositum, & juxta assertionem Patrum, quibus id commisimus, approbatum, ut typis mandetur, quo ad Nos spectat, facultatem concedimus. In quorum fidem præsentes Literas manu propria subscripsimus: & solito nostro Sigillo firmavimus. Romæ in Ædibus S. Silvestri Montis Quirinalis die 23. Aprilis 1740.

P. D. Andreas Bolognetti Præpositus Gener. C.R.

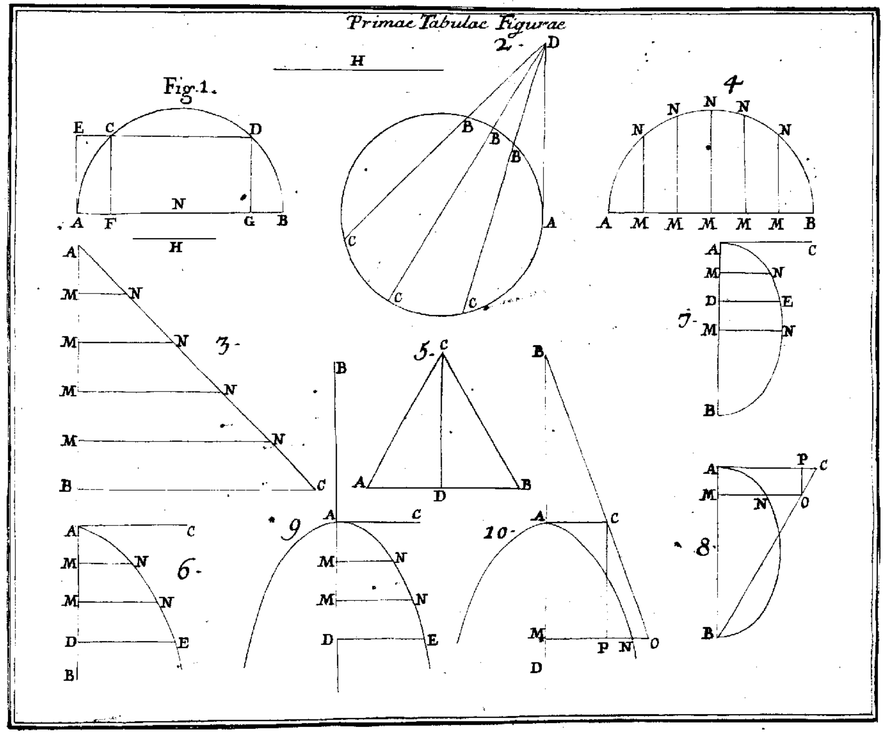
P.D.Jo.Baptista Cagnola C.R. Secret.

Imprimatur *Vic. Gen. S. Offic. Pis.*
Imprimatur *Clemens Maria Frosini Vic. Gen.*
Imprimatur *Eques Blasius Cerinius, &c.*

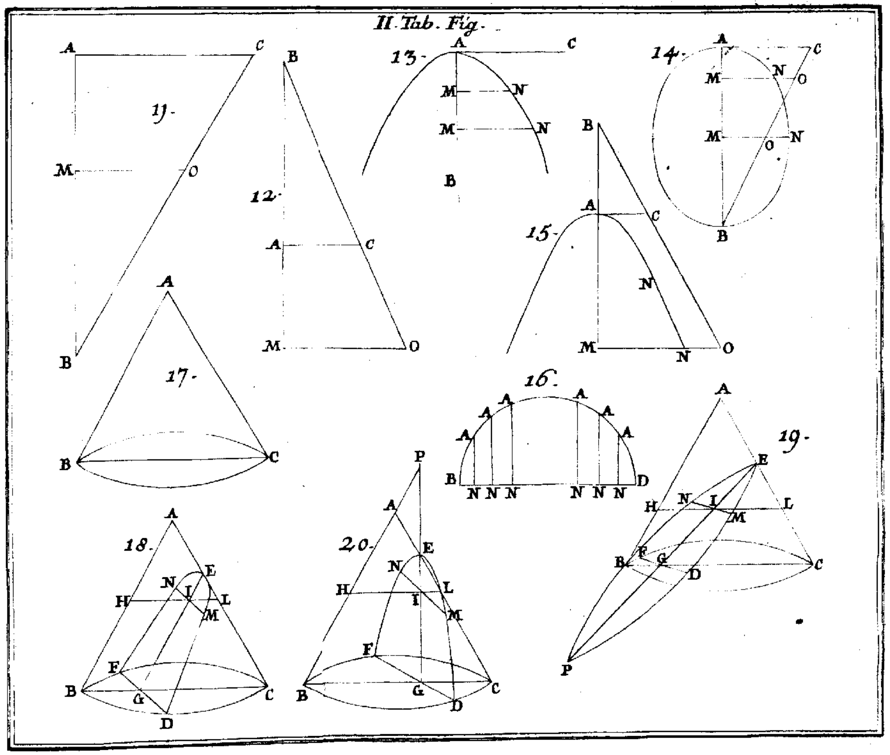
Erratorum Emendationes.

In Præfatioue Pag. viii. lin. 9. Accademiarum , *emenda* - Academiarum. In Opere, Pag. 7. lin. 4. CE, *emenda* - CF. Ibidem ead. lin. A E - A B. Pag. 17. lin. 18. N E - D E. lin. 21. ad rectangulum ANB - ad rectang. ADB. Pag 35. lin. 1. & $= n$ 1 - & $n = 1$. Pag. 38. lin. 10. protrahatur A C - protrahatur B C. Pag. 49. lin. 23. Circulis - Circulus. Pag. 50. lin. ult. occurrit - occurrat. Pag. 53. lin. 20. ex BG^n - ex BG^m. lin. 26. ad PI^n - ad PI^m. Pag. 59. lin. 12. ad BG^4 - ad BC^4. Pag. 60. lin. 13. in A B portio A F = BM - in A B portio AF (Fig. 27.) = B M (Fig. 28.). lin. 16. cum sua parametro datà E Q - *tolle* datà. Pag. 63. lin. 26. ab Triangulum - ob Triangulum. Pag 65 l. 11. PA - PH. Pag. 66. lin. penult. $= fc - ex$ - $= \frac{fc - ex}{f - x}$. Pag. 72. lin. 8. & est A E $= x - a$ - & est B E $= x - a$. lin. 17. $\frac{-ceggb + mddfc}{pegg - pmgf}$ - $\frac{-eggpb + cmddf}{epgg - cmfg}$. Pag 78. lin. 21. (pag. 18. & 19.) - (pag. 58. & 59) Pag. 78. lin 3. pro Parabola cubica secunda - pro Ellipsi cubica secunda. lin. 11. pro Parabola cubica prima - pro Ellipsi cubica prima. lin. ult. $x = \frac{aggb}{agg - bpp}$ - $x = \frac{aggb}{egg - bpp}$. Pag. 80. lin. 24. inter A M, & M N - inter A M, & A C. Pag. 81. lin. 24. inter MO, & MN - inter MO, & AM. Pag. 84. lin 2. $\frac{yy}{a + x}$ - $\frac{yy}{a + \frac{ax}{b}}$ Pag. 85. lin. 12. portioni AF in AC - portioni AE in AC. lin. 27. quia $y . x :: x . \frac{yy}{a}$ - quia $y . x :: a . \frac{yy}{a}$. Pag. 88. lin. 21. ratio A F - ratio AE. Pag. 96. lin. 8. ut C F, ad F H - ut C H ad F H. Pag. 97. lin. 9. nominando - nominanda. Pag 98. lin. 6. AC, AE - AC, CE. Pag. 100. lin. 14. AE - CE. Pag. 101. lin. 18. parametrum - perimetrum. Pag. 103. lin. 6. & completo parallelo-gram-

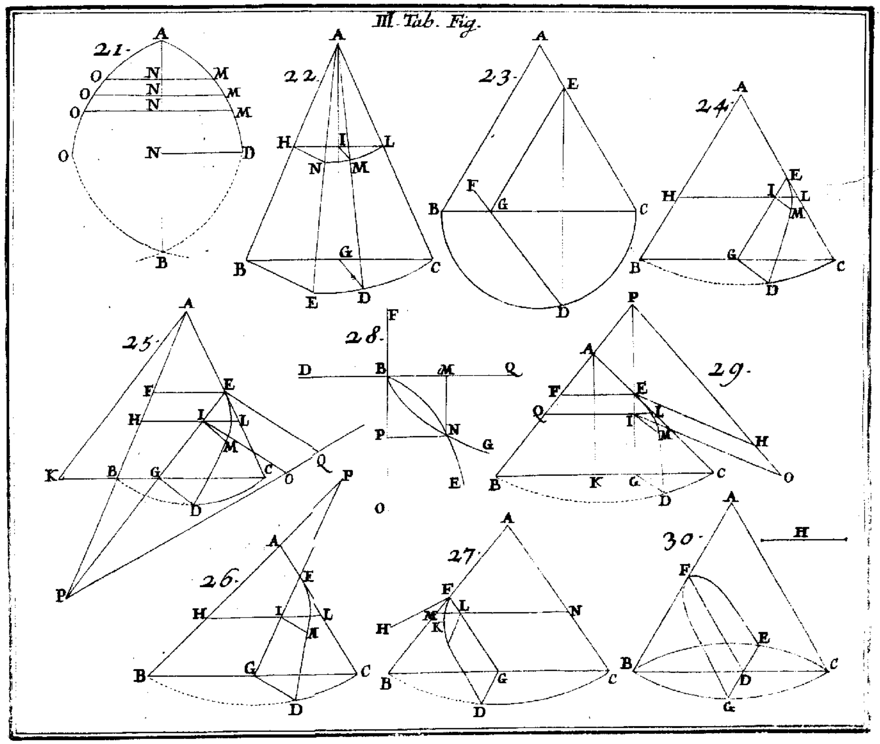
grammum AD - & completo parallelogrammo AD. Pag. 106. lin. 20. æquale - æqualia. Pag. 108. lin. 31. emissæ AO - emissæ AC. Pag 110. lin. 1. abscindatur QG - fiat AG. Pag. 115. lin. 2. invetus - inventus. Pag 117 lin. 27. sine linea abscissarum - in ipsa AK sumptà pro linea abscissarum. Pag. 125. lin 6. super rectà F A - super rectà G A. Pag. 132. lin. 23. modus - modos. Pag. 133. lin. 19. ipsa anguli lateri - ipsa anguli latera. Pag. 143. lin. 24. ipsa AM - ipsa OM. Pag. 144. lin. 12. interceptum - interceptam. *In fine tolle ex margine* Fig. 80. Pag. 149. lin. 11. AM^2 - OM^2. lin. 19. AM^2 - OM^2. Pa. 153. lin. 8. $\frac{cay - cby}{bx}$ - $\frac{cay - cbx}{bx}$ Pag. 150. lin. 33. DEN - DEB. Pag 173. lin. 16. ita x^r, T^s - ita t^s, T^r. lin. 18. x sit ad T - t sit ad T. Pag. 176. lin. 33 AN - AM. Pag. 184. lin. 29. motu variabili - & ex motu variabili. lin. ult. ratione - ratione. Pag 185. lin. 3. si ponatur *m* - si ponatur *n*. Pag. 192. lin. 6. DBD - DAD. Pag 198. lin. 20 chorda NC - chorda NG. Pag. 199. lin. 29. alterius Circuli BGD - alterius Circuli BGE. Pag. 201. lin. 33. rationalis existit - irrationalis existit. Pag. 202. lin. 15. ardinatæ *y* - ordinatæ *y*. Pag. 203 lin. 7. denominatus sinus CP - denominatus sinus CP (Fig. 110.) lin. 16. HA, FB - FB, HA. Pag. 204. lin. 2. minoris ad majus, - majoris ad minus. lin. 3. majoris ad minus, - minoris ad majus. Pag. 208. lin. 13. ita AO ad AN - ita AO ad AP.

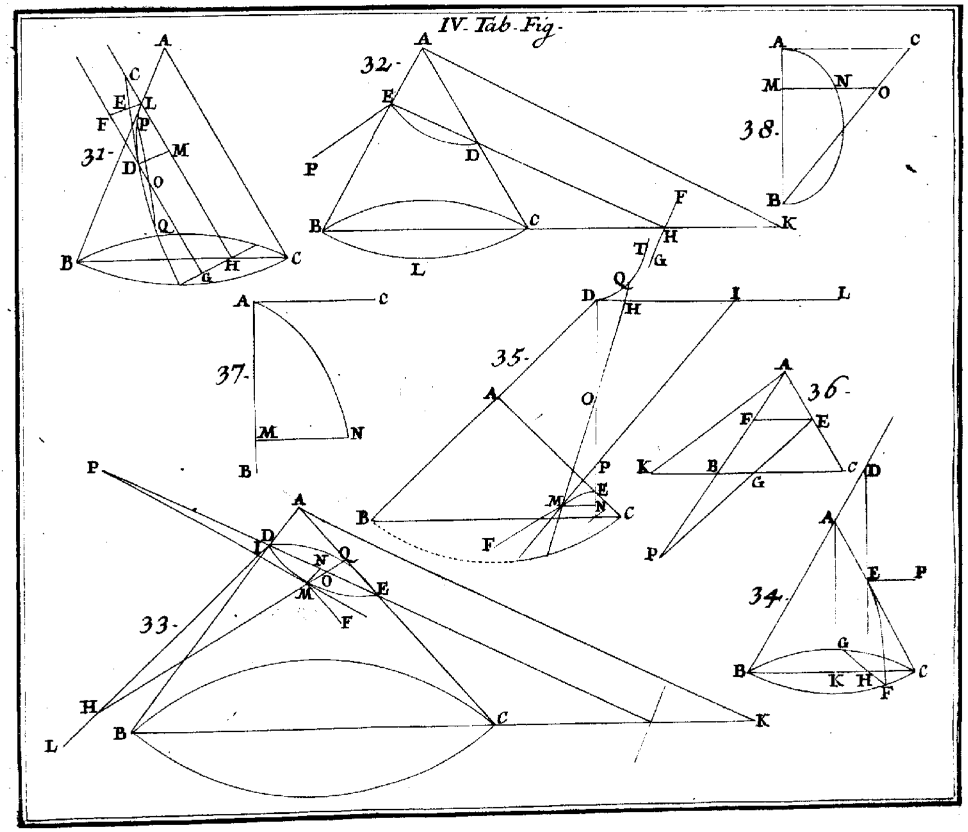


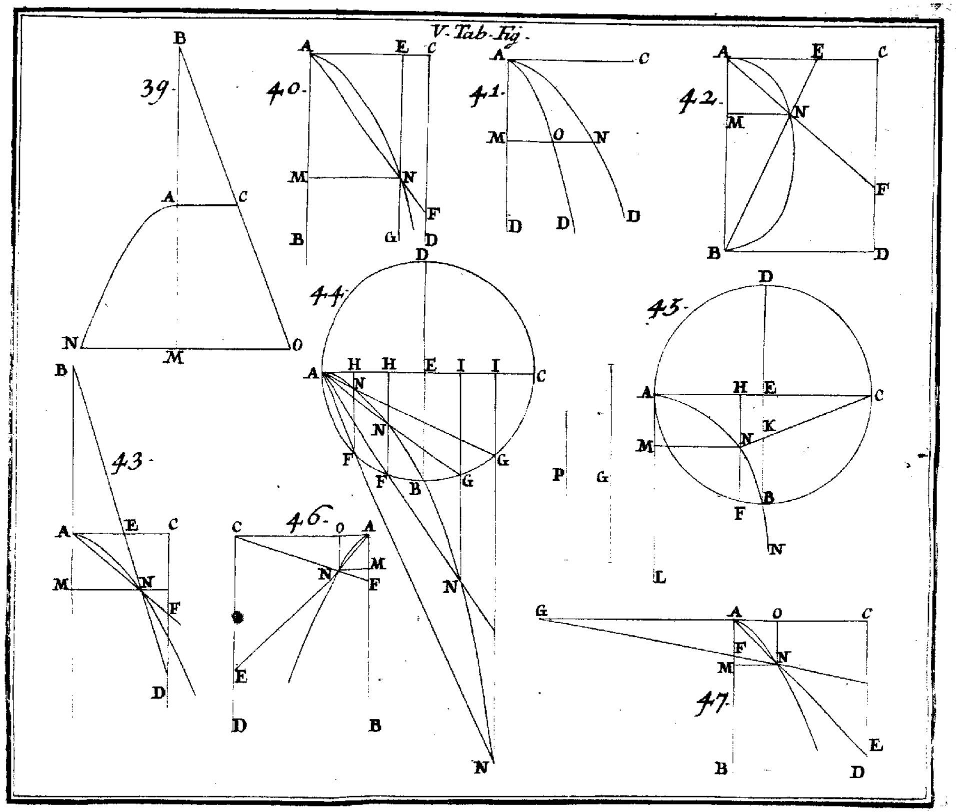
Primae Tabulae Figurae


II. Tab. Fig.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.

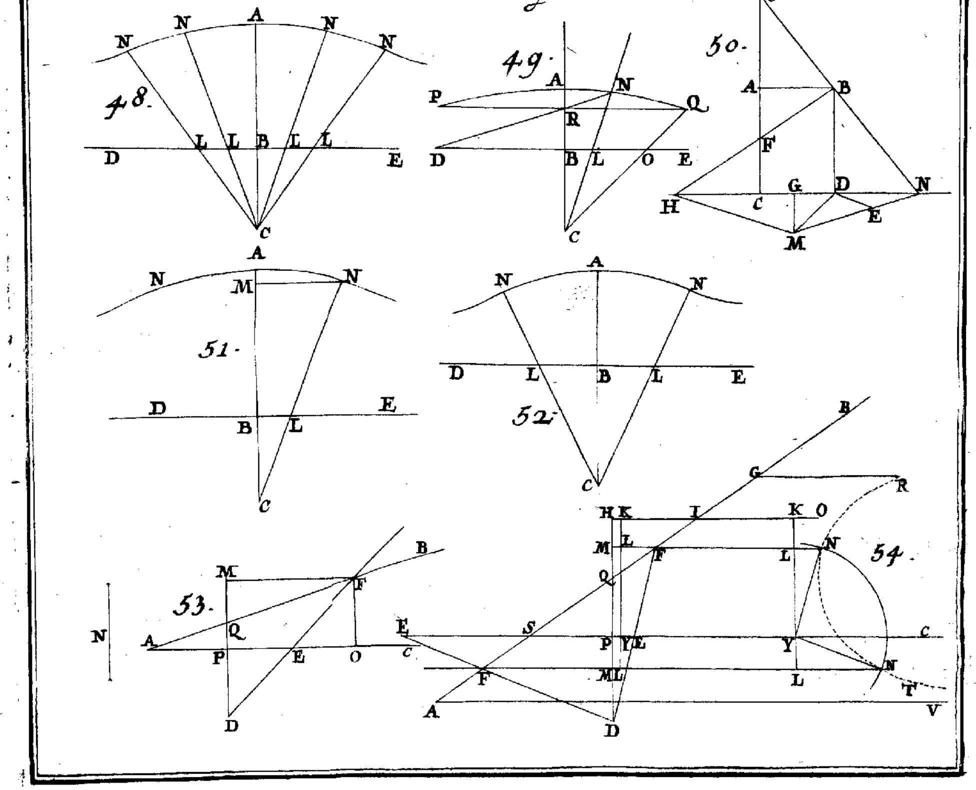
III. Tab. Fig.



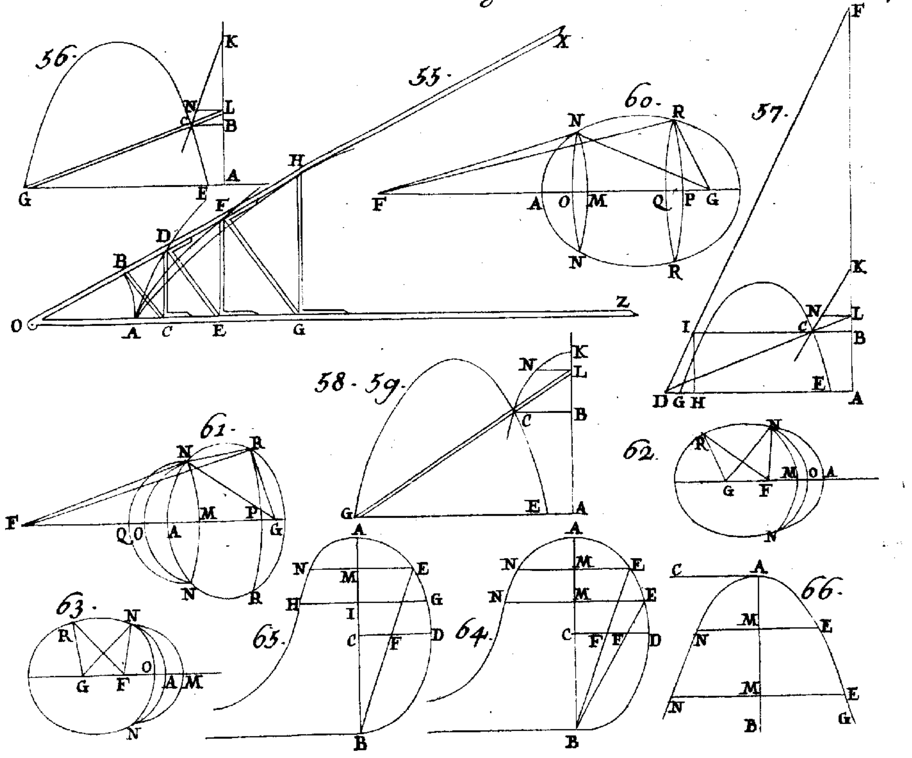

IV. Tab. Fig.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.

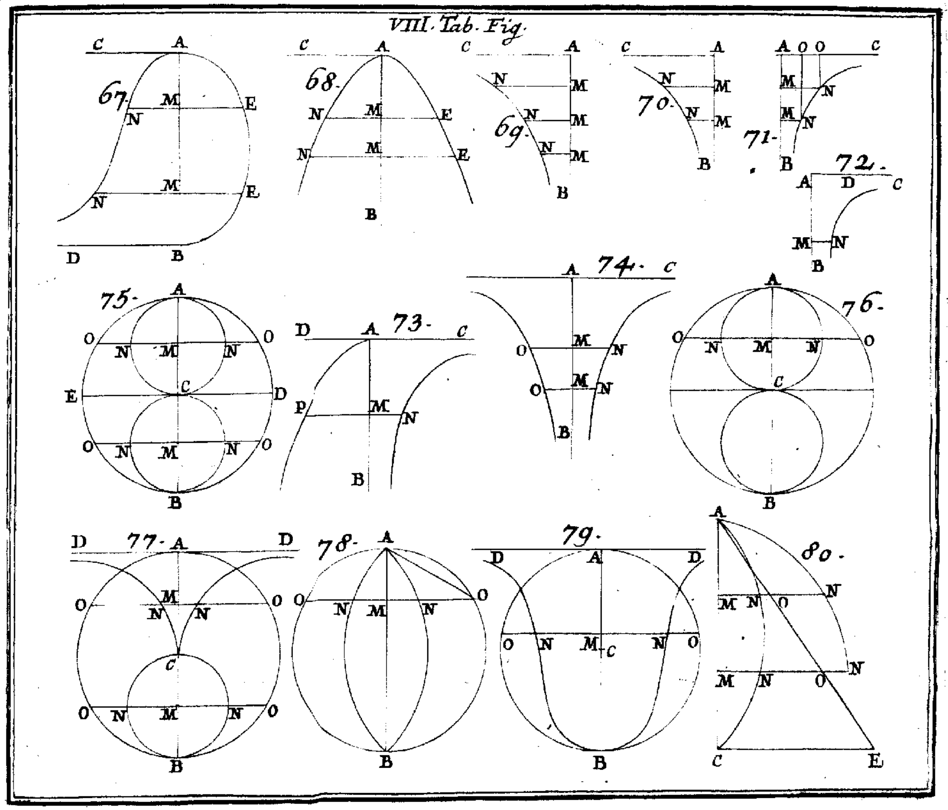

V. Tab. Fig.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.

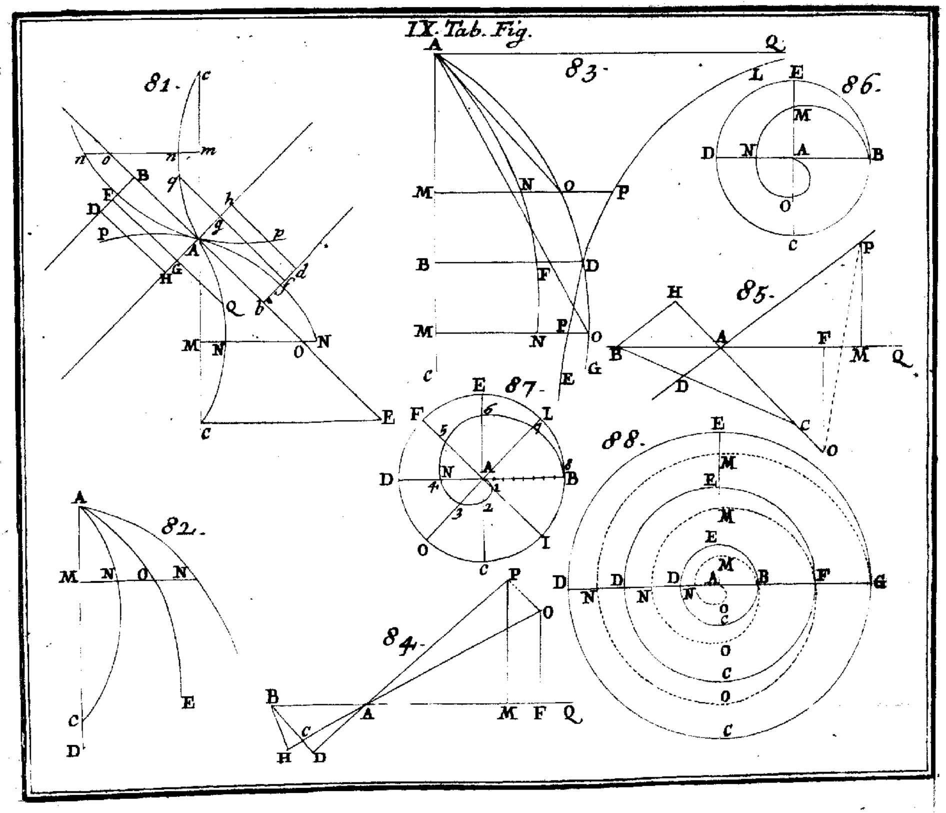
VI. Tab. Fig.

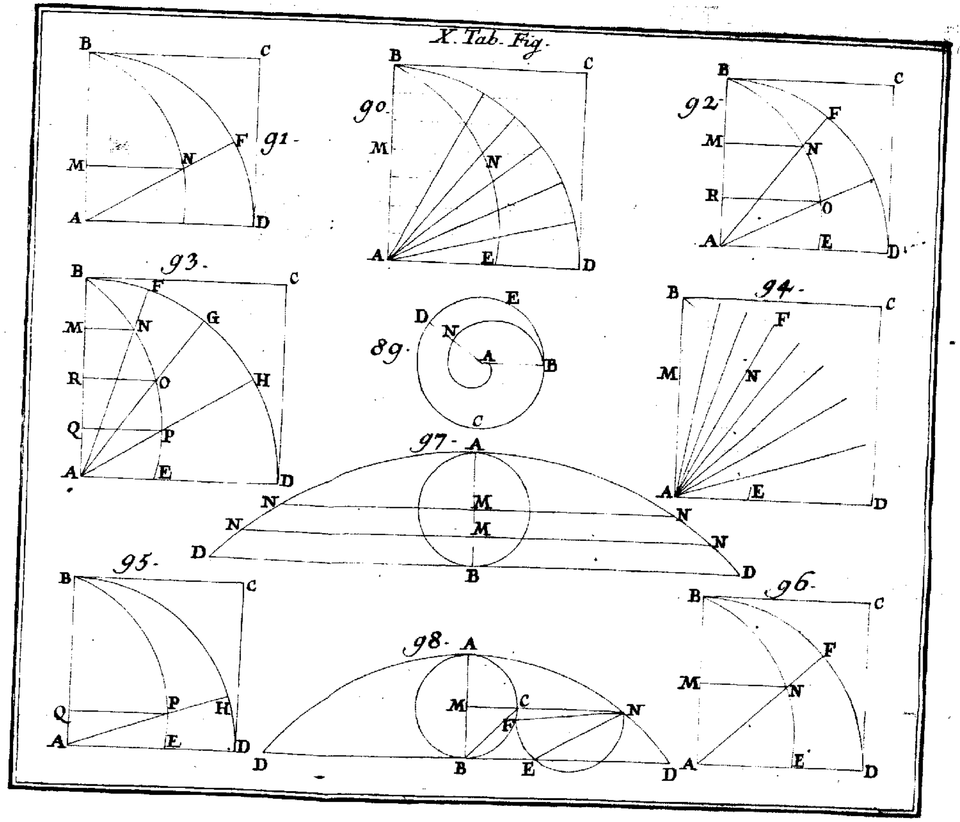


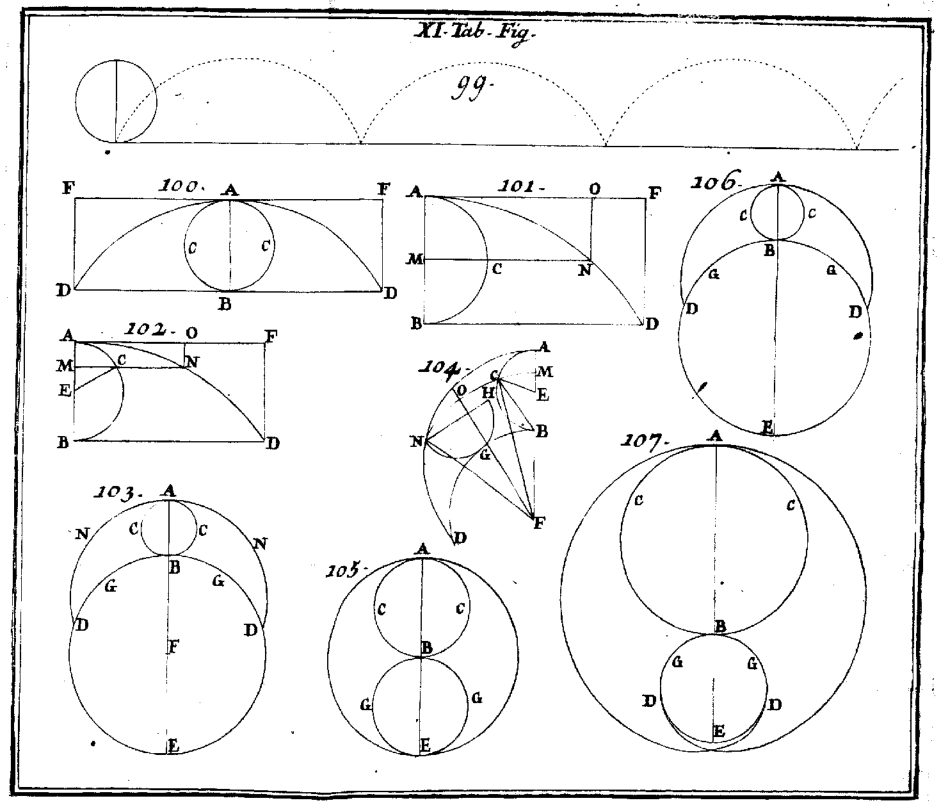
VII. Tab. Fig.



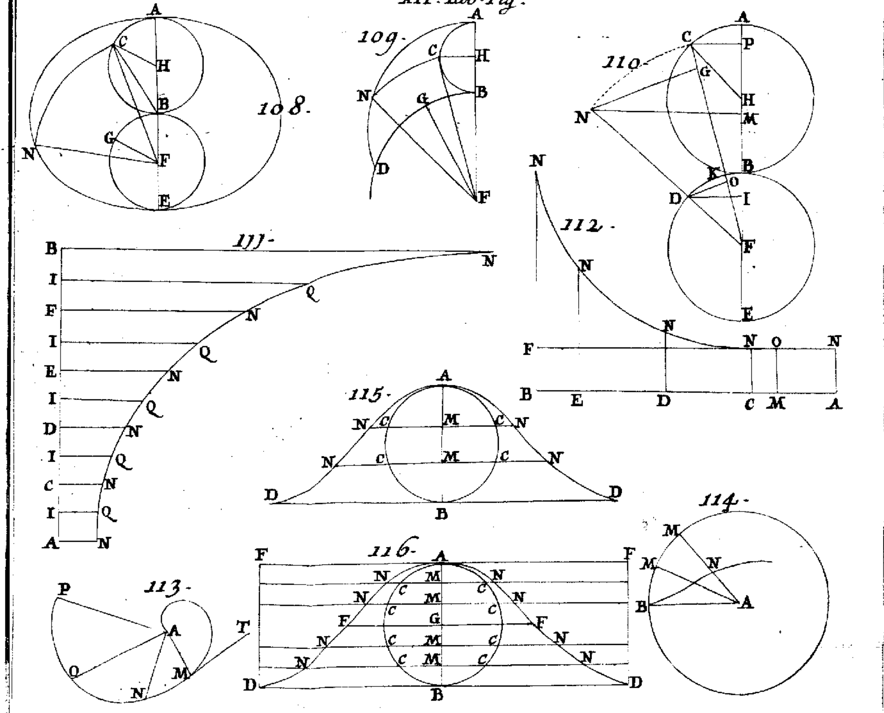

VIII. Tab. Fig.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.


IX. Tab. Fig.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.


X. Tab. Fig.
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98


XI. Tab. Fig.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
A
B
C
D
E
F
G
H
M
N
O

XII. Tab. Fig.



M. Tuscher del.   B. Sgrilli sculp.